5^a Lista de exercícios

Intr. à Relatividade — Data de entrega: 08/06

① [1.5] Nas minhas notas de aula eu discuti como uma onda gravitacional se propagando na direção z possui amplitudes $\epsilon_{\mu\nu}$, com:

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h^+ & h^\times & 0 \\ 0 & h^\times & -h^+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Uma transformação de coordenadas $x \to x'$ que é simplesmente uma rotação em torno do eixo z por um ângulo φ é dada pela matriz:

$$R^\alpha_\beta = \frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi & 0 \\ 0 & -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .$$

Sabendo que as perturbações da métrica se transformam como $h'_{\mu\nu} = R^\alpha_\mu \, R^\beta_\nu \, h_{\alpha\beta}$, mostre que as amplitudes no novo referencial, $\epsilon'_{\mu\nu}$, são tais que $h'^+ = h^+ \cos 2\varphi - h^\times \operatorname{sen} 2\varphi$ e $h'^\times = h^\times \cos 2\varphi + h^+ \operatorname{sen} 2\varphi$.

Solução: Como ambos, R^α_β e $\epsilon_{\mu\nu}$ só possuem componentes 1 e 2:

$$\epsilon'_{11} = h'^+ = R^1{}_1 R^1{}_1 \epsilon_{11} + R^1{}_1 R^2{}_1 \epsilon_{12} + R^2{}_1 R^1{}_1 \epsilon_{21} + R^2{}_1 R^2{}_1 \epsilon_{22} = \quad (1)$$

$$= h^+(cos^2\varphi - sin^2\varphi) - h^x(2sin\varphi \cos\varphi) = h^+ \cos 2\varphi - h^x \sin 2\varphi. \quad (2)$$

$$\epsilon'_{12} = h'^x = R^1{}_1 R^1{}_2 \epsilon_{11} + R^1{}_1 R^2{}_2 \epsilon_{12} + R^2{}_1 R^1{}_2 \epsilon_{21} + R^2{}_1 R^2{}_2 \epsilon_{22} = \quad (3)$$

$$= h^+(2\sin\varphi cos\varphi) + h^x(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) = h^+ \sin 2\varphi + h^x \cos 2\varphi. \quad (4)$$

② [2.5] Na Aula 21 eu cheguei numa equação que eu disse que é basicamente a Equação do Desvio Geodésico:

$$\frac{d^2 \Delta X^\mu}{d\tau^2} + \partial_\nu \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \, \Delta X^\nu \, U^\alpha U^\beta + 2\Gamma^\mu_{\alpha\beta} \, U^\alpha \, \frac{d\Delta X^\beta}{d\tau} = 0 \, .$$

Mostre que, introduzindo a derivada direcional:

$$\frac{D\Delta X^{\mu}}{D\tau} = \frac{dX^{\nu}}{d\tau} D_{\nu}(\Delta X^{\mu}) \ ,$$

podemos escrever a primeira equação acima na sua forma mais usual:

$$\frac{D^2\Delta X^{\mu}}{D\tau^2} = -R^{\mu}_{\ \alpha\nu\beta}\, \Delta X^{\nu}\, U^{\alpha} U^{\beta} \ .$$

Solução:

Primeiro notemos que:

$$\ddot{X}^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu} \tag{5}$$

e portanto

$$\Delta\ddot{X}^{\alpha} = -2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Delta\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu} - (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu}. \tag{6}$$

Abrindo a derivada direcional de primeira ordem, temos:

$$\frac{D}{D\tau}\Delta X^{\alpha} = \Delta\dot{X}^{\alpha} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\Delta X^{\nu}. \tag{7}$$

A derivada direcional de segunda ordem é:

$$\frac{D^2}{D\tau^2}\Delta X^{\alpha} = \Delta\ddot{X}^{\alpha} + \frac{d}{d\tau}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\Delta X^{\nu}) + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\frac{D}{D\tau}\Delta X^{\nu}. \tag{8}$$

Substituindo (6) em (8), obtemos:

$$\begin{aligned}\frac{D^2}{D\tau^2}\Delta X^{\alpha} = &-2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Delta\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu} - (\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu} + \frac{d}{d\tau}(\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\Delta X^{\nu}) \\ &+\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}(\Delta\dot{X}^{\nu} + \Gamma^{\mu}_{\epsilon\eta}\dot{X}^{\epsilon}\Delta X^{\eta}).\end{aligned} \tag{9}$$

Abrindo o terceiro termo do lado direito obtemos um termo do tipo $\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\dot{X}^{\mu}\Delta\dot{X}^{\nu}$, que junto com o último termo do lado direito vai cancelar o termo $-2\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Delta\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu}$.

O segundo termo pode ser aberto em

$$(\Delta\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu})\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu} = \partial_{\delta}\Gamma^{\alpha}_{\mu\nu}\Delta X^{\delta}\dot{X}^{\mu}\dot{X}^{\nu}. \tag{10}$$

Substituindo (10) em (9):

$$\frac{D^2}{D\tau^2}\Delta X^\alpha = -\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Delta X^\delta \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu + (\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{X}^\delta + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\ddot{X}^\mu)\Delta X^\nu$$

$$+\Gamma^\alpha_{\mu\nu}\dot{X}^\mu \dot{X}^\epsilon \Delta X^\eta. \tag{11}$$

Usando (5) e renomeando os índices de forma adequada:

$$\frac{D^2}{D\tau^2}\Delta X^\alpha = (\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\mu\eta} - \partial_\eta \Gamma^\alpha_{\mu\delta} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu}\Gamma^\nu_{\delta\eta} - \Gamma^\alpha_{\beta\eta}\Gamma^\beta_{\mu\delta})\Delta X^\eta \dot{X}^\mu \dot{X}^\delta, \tag{12}$$

onde reconhecemos a expressão entre parênteses como sendo tensor de Riemann.

③ [1.5] Vimos em sala de aula o efeito que as polarizações h^+ e $h^\times$ exercem sobre uma configuração circular de massas no plano ortogonal à direção de propagação da onda (na ocasião, assumimos que essa direção era z, e colocamos as massas no plano $x-y$). Vimos que a polarização h^+ contrai e expande esse círculo alternadamente, ao longo das direções x e y, enquanto que a polarização $h^\times$ faz o mesmo, mas girado de 45°.

Suponha que temos uma onda gravitacional cuja polarização é dada por:

$$\epsilon^{L,R}_{\mu\nu} = \epsilon^+_{\mu\nu} \pm i\epsilon^\times_{\mu\nu}\ ,$$

onde $\epsilon^{+,\times}_{\mu\nu}$ são polarizações "puras", que só possuem a amplitude h^+ (no caso de $\epsilon^+_{\mu\nu}$), ou só a amplitude $h^\times$ (no caso de $\epsilon^\times_{\mu\nu}$). Encontre os efeitos que essas duas ondas gravitacionais planas exercem sobre uma distribuição circular de matéria.

Solução:

Vimos em sala de aula que o desvio ΔX induzido por uma onda gravitacional é dado por:

$$\frac{d^2\Delta X^i}{dt^2} = -\frac{1}{2}k^2\epsilon_{ij}\Delta X^j. \tag{13}$$

Para uma polarização do $\epsilon^{L,R}_{\mu\nu}$, portanto,

$$\frac{d^2\Delta X^{L,R}}{dt^2} = -\frac{1}{2}(h^+\Delta X \pm ih^\times \Delta Y)e^{-ik(t-z)} \tag{14}$$

$$\frac{d^2\Delta Y^{L,R}}{dt^2} = +\frac{1}{2}(h^+\Delta Y \mp ih^\times \Delta X)e^{-ik(t-z)}. \tag{15}$$

Em primeira ordem em h^+ e $h^\times$:

$$\Delta X^{L,R} \simeq \Delta X_0 + \frac{e^{-k(t-z)}}{2}[\Delta X_0 h^+ \pm ih^\times \Delta Y_0] \tag{16}$$

$$\Delta Y^{L,R} \simeq \Delta Y_0 - \frac{e^{-k(t-z)}}{2}[\Delta Y_0 h^+ \mp ih^\times \Delta X_0]. \tag{17}$$

Tomando as partes reais:

$$\Delta X^{L,R} = \Delta X_0 + \frac{1}{2}[\Delta X_0 h^+ \cos(k(t-z)) \pm h^\times \Delta Y_0 \sin(k(t-z))] \tag{18}$$

$$\Delta Y^{L,R} = \Delta Y_0 - \frac{1}{2}[\Delta Y_0 h^+ \cos(k(t-z)) \mp h^\times \Delta Y_0 \sin(k(t-z))]. \tag{19}$$

Uma inspeção nas soluções acima nos mostra que um anel em forma de elipse de partículas vai girar de acordo com a regra da mão direita/esquerda dependendo se a polarização é R/L.

4 [4.5] Considere duas massas idênticas m presas a uma mola de massa desprezível. Essas massas oscilam em torno da posição de equilíbrio fazendo um movimento no eixo z dado por:

$$z_\pm(t) = \pm\left[z_0 + ae^{i\omega t}\right] \ ,$$

(a) Assuma que se tratam de massas pontuais e calcule o momento de quadrupolo "reduzido" desse sistema:

$$Q^{ij} = \int d^3x\, \rho(\vec{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3}\vec{x}^2\delta^{ij}\right) \ .$$

Solução: As componentes do momento de quadrupolo reduzido são $Q^{11} = -(1/3)2mz^2 = Q_{22}$, $Q^{33} = (2/3)2mz^2$. Na forma matricial:

$$Q = \frac{2}{3}mz^2 \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}mz^2 M. \tag{20}$$

(b) Assumindo que estamos observando esse sistema desde uma distância muito grande ($r \gg z_0$), encontre a expressão para as perturbações da métrica correspondentes as ondas gravitacionais emitidas por esse sistema de massas aceleradas (não esqueça de detalhar as dependências espacial e temporal, assim como as polarizações).

Solução: A amplitude das ondas gravitacionais é:

$$h^{ij} \simeq 2G\frac{e^{i\omega r}}{r}\ddot{Q}^{ij} = 2G\frac{e^{i\omega r}}{r}\frac{2m}{3}M(2\ddot{z}z + 2\dot{z}^2) = \tag{21}$$

$$= \frac{8mGe^{i\omega r}M}{3r}\left[-\omega^2 a(z_0 + ae^{-i\omega t})e^{-i\omega t} + (-i\omega ae^{-i\omega t})^2\right] = \tag{22}$$

$$= -\frac{e^{-i\omega(t-r)}}{r}\frac{8GmM\omega^2 az_0}{3}\left(1 + \frac{2a}{z_0}e^{-i\omega t}\right). \tag{23}$$

(c) A potência irradiada em ondas gravitacionais por um quadrupolo que varia no tempo é dada por:

$$P = \frac{dE}{dt} \simeq \frac{G}{10\,c^5}\left|\frac{d^3Q^{ij}}{dt^3}\right|^2 .$$

Dado que a energia do oscilador harmônico é $E = 1/(2m)\,\omega^2 a^2$, qual a *taxa* com a qual a amplitude do oscilador (a) deve decair com o tempo, devido à emissão de ondas gravitacionais? Primeiro obtenha o resultado geral, assumindo que $a \ll z_0$. Depois, calcule o resultado caso tenhamos uma massa de $m = 100$ kg, uma frequência de oscilação $\omega = 10^3$ Hz, uma posição de equilíbrio $z_0 = 1$ m e uma amplitude de oscilação de $a = 1$ cm .

Solução:

$$\ddot{Q} = \frac{4m}{3}M(-\omega^2 z_0 ae^{-i\omega t} - 2\omega^2 a^2 e^{-2i\omega t}) \tag{24}$$

$$\dddot{Q} = \frac{4m}{3}M(i\omega^3 z_0 ae^{-i\omega t} + 4i\omega^3 a^2 e^{-2i\omega t}). \tag{25}$$

Depois de um pouco de álgebra:

$$\langle P\rangle_{ciclo} = -\frac{16G}{15c^5}m^2\omega^6 z_0^2 a^2(1 + \frac{4a}{z_0} + 16\frac{a^2}{z_0^2}). \tag{26}$$

A taxa com a qual a amplitude do oscilador vai cair é:

$$\Gamma = \frac{1}{E}\langle\frac{dE}{dt}\rangle = \frac{32mG\omega^4 z_0^2}{15c^5}. \tag{27}$$

Substituindo os dados do enunciado obtemos:

$$\Gamma = 4.34 \times 10^{-21} Hz. \tag{28}$$