Lista IV

① [1.0] Em geral uma equação de movimento não segue de uma lei de conservação, mas isso pode acontecer em alguns casos. Por exemplo, para uma partícula de massa m que se movimenta em uma dimensão, a conservação de energia implica na equação de movimento para essa partícula.

Considere uma partícula de massa m_0 se movendo ao longo de uma linha de mundo x^σ num epaço-tempo qualquer. O tensor de energia-momento para essa partícula pode ser escrito como:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-g}} m_0 \int ds \frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds}\delta^{(4)}\left(x^\sigma - x^\sigma(s)\right). \tag{1}$$

Mostre que a lei de conservação $T^{\mu\nu}_{;\nu} = 0$ implica na equação da geodésica para a trajetória $x^\sigma(s)$. Por quê neste caso a equação de movimento segue da lei de conservação? *Dica:* Em uma solução possível é útil usar a relação derivada em aula:

$$\Gamma^\nu_{\mu\nu} = \frac{1}{\sqrt{-|det(g)|}}\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\sqrt{-|det(g)|}). \tag{2}$$

Solução: A derivada covariante do tensor energia-momento é:

$$D_\mu T^{\mu\nu} = \partial_\mu T^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\mu}T^{\alpha\nu} + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}T^{\alpha\mu} = 0. \tag{3}$$

Usando a relação (2), podemos reescrever a equação acima como:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\mu(\sqrt{-g}T^{\mu\nu}) + \Gamma^\nu_{\alpha\mu}T^{\alpha\mu} = 0. \tag{4}$$

Note que o segundo termo está na forma que queremos. No integrando do primeiro termo, temos:

$$\partial_\mu\left(\frac{dx^\mu(s)}{ds}\frac{dx^\nu(s)}{ds}\delta^{(4)}(x^\sigma - x^\sigma(s))\right). \tag{5}$$

A derivada ∂/∂_μ só vai agir na delta:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}\delta^{(4)}(x^\sigma - x^\sigma(s)) = \frac{\partial\delta^{(4)}(x^\sigma - x^\sigma(s))}{\partial(x^\sigma - x^\sigma(s))}\delta^\mu_\sigma = \tag{6}$$

$$- \frac{\partial \delta^{(4)}(x^\sigma - x^\sigma(s))}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x^\mu(s)} \tag{7}$$

Fazendo a integração por partes no primeiro termo de (4) obtemos:

$$- \frac{m_0}{\sqrt{-g}} \left(\frac{dx^\nu(s)}{ds} \delta^{(4)}(x^\sigma - x^\sigma(s)) \Big|_{s_i}^{s_f} - \int ds \frac{d^2 x^\nu(s)}{ds^2} \delta^{(4)}(x^\sigma - x^\sigma(s)) \right). \tag{8}$$

O primeiro termo da expressão acima se anula[1], enquanto que o segundo termo nos dá exatamente o que precisávamos. Substituindo em 4 e argumentando que o integrando se anula, obtemos a equação da geodésica.

Note que a equação de movimento para a partícula (equação da geodésica) segue da lei de conservação. Isso acontece por que nesse caso o número de vínculos gerados pela lei de conservação é igual ao número de graus de liberdade. Isso também acontece para um movimento unidimensional. Se no tensor de energia-momento também houvesse uma contribuição de um campo escalar, por exemplo, então a divergência covariante do tensor energia-momento combinado não seria suficiente para determinar a dinâmica da partícula, mas também precisaríamos da equação de movimento para o campo escalar. Uma situação desse tipo é encontrada na equação (16) do paper arXiv:1108.3081v1.

② [1.0] O tensor de Ricci é definido como uma contração do tensor de Riemann $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$. Mostre que na aproximação quase-estática a componente tempo-tempo do tensor the Ricci é dada por

$$R_{00} \simeq \nabla^2 \Phi + \mathcal{O}(\Phi^2), \tag{9}$$

onde Φ é o potêncial Newtoniano. *Dica:* Começe decompondo a métrica como $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ onde $h_{\mu\nu} \ll 1$.

[1]Esse termo é básicamente a diferença da quadri-velocidade nos instantes inicial e final da trajetória, que se anula para uma órbita fechada. Entretanto, em uma órbita aberta, esse termo se anular vai depender da escolha de s_f e s_i. Por exemplo, numa trajetória em uma métrica doe Schwarzschild as quadrivelocidades serão iguais se tomarmos os instantes iniciais e finais quando a particula está muito longe da fonte.

Solução: Podemos decompor a métrica como:

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \tag{10}$$

onde $h_{\mu\nu}$ é uma perturbação de primeira ordem. Deste modo, as conexões e o tensor de Ricci podem ser calculadas como

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\nu} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}\left(h_{\alpha\gamma,\nu} + h_{\nu\gamma,\alpha} - h_{\alpha\nu,\gamma}\right) \tag{11}$$

e

$$R_{\alpha\beta} = R^{\lambda}_{\alpha\lambda\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda,\beta} + \Gamma\Gamma - \Gamma\Gamma \approx \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta,\lambda} - \Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda,\beta}, \tag{12}$$

onde nós negligenciamos termos do tipo $\Gamma\Gamma$ por serem de segunda ordem em h. Em primeira ordem, as conexões e o tensor de Ricci ficam:

$$\Gamma^{\lambda}_{\alpha\lambda,\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}\left(h_{\alpha\gamma,\lambda\beta} + h_{\lambda\gamma,\alpha\beta} - h_{\alpha\lambda,\gamma\beta}\right) = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}h_{\lambda\gamma,\alpha\beta} \tag{13}$$

e

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}\left(h_{\alpha\gamma,\beta\lambda} + h_{\beta\gamma,\alpha\lambda} - h_{\alpha\beta,\gamma\lambda} - h_{\lambda\gamma,\alpha\beta}\right). \tag{14}$$

Agora vamos calcular R_{00} lembrando que $h_{ij,0} = 0$ e a componente tempo-tempo é $h_{00} = 2\Phi$:

$$\begin{aligned} R_{00} &= \frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}\left(h_{0\gamma,0\lambda} + h_{0\gamma,0\lambda} - h_{00,\gamma\lambda} - h_{\lambda\gamma,00}\right) = -\frac{1}{2}\eta^{\lambda\gamma}h_{00,\gamma\lambda} \\ &= -\eta^{\lambda\gamma}\Phi_{,\lambda\gamma} = \nabla^2\Phi. \end{aligned} \tag{15}$$

③ [1.0] Encontre o raio de Schwarzschild de um objeto esférico que tenha a massa da terra ($M = 6 \times 10^{24}$Kg).

Solução:

$$r_s = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2 \times 6.67 \times 6}{9} \times 10^{-3}m \simeq 0.9cm!! \tag{16}$$

④ [1.0] Uma forma mais geral da equações de Einstein pode ser como:

$$R_{\mu\nu} - \alpha g_{\mu\nu}R = 8\pi G T_{\mu\nu}, \tag{17}$$

onde α é uma constante adimensional. Mostre que se α não fosse 1/2, então as equações de Einstein não estariam de acordo com os experimentos.

Dica: Considere a divergencia covariante das equações de Eintein. Para fazer isso, contraia as identidades de Bianchi para obter que $R_{,\mu} = 2R^{\nu}_{\mu};_{\nu}$. Depois derive o traço das equações de Einstein.

Solução: Primeiro, vamos obter as identidades de Bianchi contraídas:

$$
\begin{aligned}
g^{bn}g^{am}\left(R_{abmn;\ell} + R_{ab\ell m;n} + R_{abn\ell;m}\right) = 0 \\
g^{bn}\left(R^{m}_{bmn;\ell} - R^{m}_{bm\ell;n} + R^{m}_{bn\ell;m}\right) = 0 \\
g^{bn}\left(R_{bn;\ell} - R_{b\ell;n} - R^{m}_{b\ n\ell;m}\right) = 0 \\
R_{;\ell} - R^{n}_{\ell,n} - R^{m}_{\ell;m} = 0 \\
R_{;\ell} = 2R^{m}_{\ell;m}.
\end{aligned}
$$

Agora vamos usar a relação acima na derivada covariante das equações de Einstein:

$$(R^{\mu}{}_{\nu} - \alpha\delta^{\mu}{}_{\nu}R)_{;\beta} = 8\pi G(T^{\mu\nu})_{;\beta} \tag{18}$$

e, portanto,

$$(\frac{1}{2} - \alpha)R_{;\nu} = 8\pi G T^{\beta}{}_{\nu;\beta}\,. \tag{19}$$

Agora, derivando o traço das equações de Einstein, obtemos:

$$(1 - 4\alpha)R_{,\mu} = 8\pi G T_{,\nu}\,. \tag{20}$$

As equações de movimento devem ser:

$$T^{\beta}{}_{\nu;\beta} = \kappa T_{,\nu}\,, \tag{21}$$

onde $\kappa = \frac{1/2-\alpha}{1-4\alpha}$. No limite Newtoniano e para um fluido de densidade ρ e pressão negligenciável, a componente 0 dessa equação é:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla.(\rho\boldsymbol{v}) = \kappa\frac{\partial\rho}{\partial t}. \tag{22}$$

Portanto, a energia só vai conservar se $\kappa = 0$, ou seja, se $\alpha = 1/2$.

⑤ [1.0] Um aluno está descrevendo a sua queda radial num buraco negro de Schwarzschild através de ondas de rádio, enquanto outro aluno recebe a transmissão fixo em (r_*, θ_*, ϕ_*). Para resolver este exercício, é útil saber que $E_\lambda = (1 - R_s/r)dt/d\lambda$, onde $R_s = 2GM$, é uma constante de movimento (veja a equação 5.61 do livro do Sean Carroll).

a) Mostre que a velocidade com a qual o aluno cai no buraco negro com relação a coordenada t é dada por:

$$\frac{dr}{dt} = -(1 - Rs/r)\sqrt{\frac{R_s(r_* - r)}{r(r_* - R_s)}} \tag{23}$$

Dica: Começe encontrando $dr/d\tau$, onde τ é o tempo próprio do aluno caindo em direção ao buraco negro.

Solução: O interválo é:

$$ds^2 = -d\tau^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 + \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1} dr^2. \tag{24}$$

Portanto,

$$1 = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt^2}{d\tau^2} - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}\frac{dr^2}{d\tau^2}. \tag{25}$$

Avaliando a equação acima em r_* (onde o aluno está em repouso) e usando que $E = (1 - R_s/r)dt/d\tau$, obtemos

$$E = \sqrt{1 - R_s/r_*}. \tag{26}$$

Deste modo,

$$dt/d\tau = (1 - R_s/r_*)/(1 - R_s/r). \tag{27}$$

Substituindo (27) em (25), obtemos:

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{R_s\left(\frac{r_* - r}{rr_*}\right)}. \tag{28}$$

Podemos obter dr/dt usando a regra da cadeia:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau}\frac{d\tau}{dt} = -(1 - R_s/r)\sqrt{\frac{R_s(r_* - r)}{r(r_* - R_s)}}. \tag{29}$$

b) Mostre que a razão entre a frequência da onda de rádio emitida em r_{em} e a frequência observada em r_* é dada por:

$$\frac{\omega_{em}}{\omega_{obs}} = \frac{\sqrt{1 - R_s/r_*}}{(1 - R_s/r_{em})}(\sqrt{1 - R_s/r_*} + \sqrt{R_s/r_{em} - R_s/r_*}) \tag{30}$$

Dica: Use que a frequência de um fóton percorrendo uma geodésica nula $x^\nu(\lambda)$ detectada por um observador com 4-velocidade U^μ é dada por:

$$\omega = -g_{\mu\nu}U^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}. \tag{31}$$

Solução:

Usando (31), temos, para a frequência emitida:

$$\omega_{em} = -g_{00}U^0\frac{dx^0}{d\lambda} - g_{11}U^1\frac{dx^1}{d\lambda} = \tag{32}$$

$$= \left(1 - \frac{R_s}{r_{em}}\right)\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\lambda} - \left(1 - \frac{R_s}{r_{em}}\right)^{-1}\frac{dr}{d\tau}\frac{dr}{d\lambda} = \tag{33}$$

$$\left(1 - \frac{R_s}{r_{em}}\right)\frac{dt}{d\tau}\frac{dt}{d\lambda} - \left(1 - \frac{R_s}{r_{em}}\right)^{-1}\frac{dr}{d\tau}\frac{dr}{d\lambda} = \tag{34}$$

$$= \left(\sqrt{1 - R_s/r_*} + \sqrt{\frac{R_s}{r} - \frac{R_s}{r_*}}\right)\frac{dt}{d\lambda}. \tag{35}$$

Na última igualdade usamos que $dt/d\tau = \sqrt{1 - R_s/r_*}/(1 - R_s/r_{em})$ e $dr/d\lambda = (dr/dt)(dt/d\lambda)$. Finalmente,

$$\omega_{em} = \left(\sqrt{1 - R_s/r_*} + \sqrt{\frac{R_s}{r} - \frac{R_s}{r_*}}\right)\frac{E_\gamma}{(1 - R_s/r_{em})}. \tag{36}$$

De forma analoga, a frequência observada será:

$$\omega_{obs} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}\frac{dt}{d\tau} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\frac{dt}{d\lambda}\frac{1}{\sqrt{1 - R_s/r_*}} = \frac{E_\lambda}{1 - R_s/r_*}. \tag{37}$$

A razão entre as frequências emitida e observada será:

$$\frac{\omega_{em}}{\omega_{obs}} = \frac{\sqrt{1 - R_s/r_*}}{(1 - R_s/r_{em})}\left(\sqrt{1 - R_s/r_*} + \sqrt{\frac{R_s}{r_{em}} - \frac{R_s}{r_*}}\right). \tag{38}$$

c) Mostre que a relação entre o redshift sofrido pela onda de rádio se relaciona com a massa do buraco negro como:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} \propto e^{t_{obs}/2GM}, \tag{39}$$

onde t_{obs} é o tempo que leva para a onda emitida chegar até o observdor em r_*.

Solução: O tempo que demora para a luz ir de r_{em} para r_* é:

$$t_{obs} = \int_{r_{em}}^{r_*} \frac{dr}{(1-\frac{R_s}{r})} = R_s \int dx \frac{x}{x-1} = \tag{40}$$

$$= R_s \left(r_* - r_{em} - \ln\left[\frac{(r_* - R_s)}{(r_{em} - R_s)}\right]\right) = \tag{41}$$

$$= R_s \ln\left[\frac{(r_* - R_s)}{(r_{em} - R_s)}\right] + C. \tag{42}$$

Usando o resultado do ítem anterior no limite em que $r_{em} \to R_s$, podemos escrever:

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} \simeq 2\frac{r_{em}(r_* - R_s)}{r_*(r_{em} - R_s)}. \tag{43}$$

Portanto,

$$t_{obs} = R_s \ln\left[\frac{r_* \lambda_{obs}}{2r_{em}\lambda_{em}}\right] \tag{44}$$

e

$$\frac{\lambda_{obs}}{\lambda_{em}} \propto e^{t_{obs}/R_s}. \tag{45}$$

⑥ [2.0] Considere, em um espaço-tempo, um conjunto de geodésicas, infinitesimalmente próximas, parametrizadas por uma variável μ e um outro conjunto parametrizado por uma variável λ. Esses dois conjuntos formam o mapeamento do espaço-tempo. O campo de vetores tangentes a curva μ é dado por u^i, enquanto o campo de vetores tangentes à curva λ é v^i.

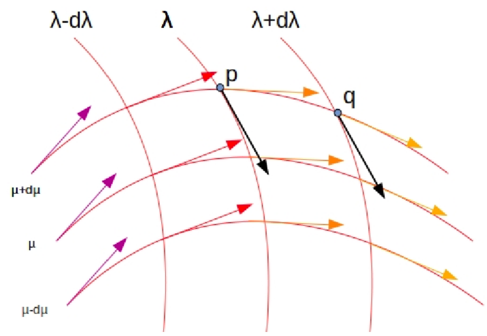

Figura 1: Conjunto de curvas λ e μ.

Considere os dois pontos $p = x_0^i$ e $q = x_0^i + \mathrm{d}x^i$, descritos na imagem acima.

a) Mostre que é possível escrever q como $x_0^i + u^i\,\mathrm{d}\lambda$ e mostre também que $v^j(q) = v^j(p) + \partial_k v^j(p) u^k\,\mathrm{d}\lambda$. (*Dica:* $f(a^l + \mathrm{d}x^l) \approx f(a^l) + \partial_k f(a^l)\,\mathrm{d}x^k$).

Solução:

$$Q - P = u^i d\lambda = dx^i \tag{46}$$

$$\therefore Q = x_0^i + u^i d\lambda \tag{47}$$

$$\Rightarrow v^j(Q) = v^j(x_0^i + u^i d\lambda) = \tag{48}$$

$$= v^j(x_0^i) + \frac{\partial v^i}{\partial x^k}(x_0^i) dx^k \tag{49}$$

$$= v^j(x_0^i) + \frac{\partial v^j}{\partial x^k}(x_0^i) u^k d\lambda \tag{50}$$

b) Mostre que, por uma transformação de coordenadas $x \to x' = x + \mathrm{d}x$ (usando $\mathrm{d}x$ como calculado anteriormentem em termos de u^i e $\mathrm{d}\lambda$), é possível escrever $v'^j(q) = v^j(p) + \partial_i u^j v^i(p)\,\mathrm{d}\lambda$.

A **Derivada de Lie** do vetor v^i sob o campo parametrizado por λ, simbolizada por $\mathcal{L}_u v^i$, é definida como

$$\mathcal{L}_u v^i = \lim_{\mathrm{d}\lambda \to 0} \frac{v^i(q) - v'^i(q)}{\mathrm{d}\lambda}. \tag{51}$$

Solução:

$$v'^j(x') = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} v^l(x) = \frac{\partial x'^j}{\partial x^l} v^l(x) = \tag{52}$$

$$= (\delta^j_l + \partial_l u^j d\lambda) v^l(x) = \tag{53}$$

$$v^j(x) + \partial_l u^j v^l(x) d\lambda. \tag{54}$$

Se $x = p$,

$$x' = p + dx = Q \tag{55}$$

$$\therefore v'^j(q) = v^j(p) + \partial_l u^j v^l(p). \tag{56}$$

c) Mostre que é possível escrever $\mathcal{L}_u v^i = u^j \partial_j v^i - v^j \partial_j u^i$.

É possível generalizar essa ideia para vetores covariantes e tensores.

Solução:

$$\mathcal{L}_\mu = \lim_{d\lambda \to 0} \frac{v^i(q) - v'^i(q)}{d\lambda} = \lim_{d\lambda \to 0} v^l \partial_l u^j - u^l \partial_l v^j = v^l \partial_l u^j - u^j \partial_l v^j. \tag{57}$$

d) Prosseguindo na mesma forma que nos itens anteriores, mostre que $\mathcal{L}_u v_i = u^j \partial_j v_i + v_j \partial_i u^j$ (Dica: ao escrever a transformação, despreze termos de segunda ordem em dλ).

Solução: Sabendo que $(J^{-1})^j_i \simeq \delta^j_i - \partial_i v^j(p)$, temos

$$v_i(q) = v_i(p) + u^j(p) \partial_j v_i(p) d\lambda \tag{58}$$

$$v'_i(q) = (J^{-1})^j_i v_j(p) = v_i(p) - v_j(p) \partial_i v^j(p) d\lambda. \tag{59}$$

$$\Rightarrow v_i(q) - v'_i(q) = [u^j(p) \partial_j v_i(p) + v_j(p) \partial_i v^j(p)] d\lambda \tag{60}$$

$$\Rightarrow \frac{v_i(q) - v'_i(q)}{d\lambda} = \mathcal{L}_u v_i = u_j \partial_j v_i + v_j \partial_i u^j \tag{61}$$

e) Mostre que, para um tensor $T_{\alpha\beta}$, $\mathcal{L}_u T_{\alpha\beta} = u^j \partial_j T_{\alpha\beta} + T_{j\beta} \partial_\alpha u^j + T_{\alpha j} \partial_\beta u^j$.

Considere agora a métrica $g_{\mu\nu}$ de um determinado espaço-tempo, um campo de vetores K^μ e uma geodésica descrita por um parâmetro λ.

Solução:

$$T_{ij}(q) = T_{ij}(p) + u^k(p) \partial_k T_{ij}(p) d\lambda \tag{62}$$

$$T'_{ij}(q) = (J^{-1})^k_i (J^{-1})^l_j T_{kl}(p) \tag{63}$$

$$= T_{ij}(p) - T_{ik}(p) \partial_j u^k(p) d\lambda - T_{kj} \partial_i u^k(p) d\lambda. \tag{64}$$

$$\frac{T_{ij}(q) - T^{ij}(q)}{d\lambda} = \mathcal{L}_u T_{ij} = u^k \partial_k T_{ij} + T_{ik} \partial_j u^k + T_{kj} \partial_i u^k. \tag{65}$$

f) Mostre que é possível escrever

$$\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu}. \tag{66}$$

A derivada de Lie tem uma relação importante com determinadas simetrias e leis de conservação em um espaço-tempo ao longo de uma trajetória. Dizemos que K^μ é um **Campo de Killing** se $\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0$. Cada campo de Killing leva a uma lei de conservação.

Solução:

$$K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu} = g_{\mu\alpha} K^\alpha_{;v} + g_{\alpha\nu} k^\alpha_{;\mu} = \tag{67}$$

$$= g_{\mu\alpha}[K^\alpha_{,\nu} + \Gamma^\alpha_{\nu\beta} K^\beta] + g_{\alpha\nu}[K^\alpha_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} K^\beta] = \tag{68}$$

$$= g_{\mu\alpha} K^\alpha_{,\nu} + g_{\alpha\nu} K^\alpha_{,\nu} \tag{69}$$

$$+ \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\beta} + g_{\mu\beta,\nu} - g_{\nu\beta,\mu}) K^\beta + \frac{1}{2}(g_{\mu\nu,\beta} + g_{\nu\beta,\mu} - g_{\mu\beta,\nu}) K^\beta = \tag{70}$$

$$= K^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\mu\alpha} K^\alpha_{,\nu} + g_{\alpha\nu} K^\alpha_{,\mu} = \mathcal{L}_u g_{\mu\nu}. \tag{71}$$

g) Mostre que, se K^μ for um campo de Killing,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(g_{\mu\nu} K^\mu \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\lambda} \right) = 0. \tag{72}$$

Solução:

$$\frac{d}{d\lambda}\left(K_\mu \frac{dx^\mu}{d\lambda} \right) = K_{\mu,\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} + K_\mu \frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} = \tag{73}$$

$$[K_{\mu,\nu} - K_\alpha \Gamma^\alpha_{\mu\nu}] \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = K_{\mu;\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = \tag{74}$$

$$= \frac{1}{2}[K_{\mu;\nu} + K_{\nu;\mu}] \frac{dx^\mu}{d\lambda}\frac{dx^\nu}{d\lambda} = 0 \tag{75}$$

h) Em coordenadas cartesianas (t, x, y, z), mostre que $K_1^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $K_2^\mu = (0, 1, 0, 0)$, $K_3^\mu = (0, 0, 1, 0)$ e $K_4^\mu = (0, 0, 0, 1)$ são campos de Killing do espaço-tempo de Minkowski.

Solução:

Em Minkowski, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}_k g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\alpha} K^\alpha_{,\nu} + \eta_{\alpha\nu} K^\alpha_{,\mu} \tag{76}$$

Portanto $K^\alpha = cte$ e é um vetor de Killing.

i) Em coordenadas esféricas (t, r, θ, ϕ) , mostre que $K_1^\mu = (1, 0, 0, 0)$ e $K_2^\mu = (0, 0, 0, 1)$ são campos de Killing do espaço-tempo de Schwarszchild.

Solução:

$$\mathcal{L}_{k_1} g_{\mu\nu} = 0 \tag{77}$$

e

$$\mathcal{L}_{K_2} g_{\mu\nu} = 0. \tag{78}$$

⑦ [2.0] a) Mostre que, definindo a Lagrangeana $\mathcal{L} = (1/2) g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu$ e usando as equações de Euler-Lagrange:

$$\frac{d}{du}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \tag{79}$$

é possível recuperar a equação da geodésica.

Solução:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\alpha} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}^\alpha}\left[(1/2) g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu\right] = \tag{80}$$

$$(1/2)(g_{\mu\nu} \delta^\mu{}_\alpha \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \delta^\nu{}_\alpha) = g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu. \tag{81}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\alpha} = (1/2) \frac{\partial}{\partial x^\alpha}(g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) = (1/2) \partial_\alpha (g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu. \tag{82}$$

As equações de Euler-Lagrange são:

$$\frac{d}{du}(g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu) - (1/2) \partial_\alpha (g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = 0 \tag{83}$$

$$= \partial_\alpha (g_{\mu\nu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu - (1/2) \partial_\alpha (g_{\mu\nu}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \tag{84}$$

$$\frac{1}{2} \partial_\alpha (g_{\mu\nu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu + \frac{1}{2} \partial_\nu (g_{\mu\alpha}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu + g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu - \frac{1}{2} \partial_\mu (g_{\alpha\nu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = \tag{85}$$

$$g_{\mu\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{1}{2}(\partial_\alpha g_{\mu\nu} + \partial_\nu g_{\mu\alpha} - \partial_\nu g_{\alpha\nu}) \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = 0. \tag{86}$$

Multiplicando a última igualdade por $g^{\beta\nu}$, obtemos a equaçõ da geodésica:

$$\ddot{x}^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\nu} \dot{x}^\alpha \dot{x}^\nu = 0. \tag{87}$$

b) Usando a definição de tempo próprio, mostre que a equação que expressa a conservação de energia no plano equatorial ($\theta = \pi/2$) de uma órbita de Schwarzschild é:

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = E + \frac{2GM}{h^2}u + \frac{2GM}{c^2}u^3, \tag{88}$$

onde $E = c^2(k^2-1)/h^2$, com h e k sendo constantes de integração e $u = 1/r$. *Dica:* Lembre que t e ϕ são coordenadas cíclicas e, portanto, $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{t} = k$ e $\partial\mathcal{L}/\partial\dot{\phi} = h$.

Solução: Partindo a definição de tempo próprio

$$c^2 d\tau^2 \equiv g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \tag{89}$$

$$c^2\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)dt^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}dr^2 - r^2 d\phi^2. \tag{90}$$

Dividindo os dois lados da igualdade acima por $\dot{\phi}$, obtemos:

$$c^2\left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\dot{t}^2/\dot{\phi}^2 - \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)^{-1}dr^2/d\phi^2 - r^2 = c^2/\dot{\phi}^2. \tag{91}$$

Onde pontos denotam derivadas com respeito ao tempo próprio. Agora, notemos que t e ϕ são coordenadas cíclicas e, portanto, podemos obter as relações:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = \left(1 - \frac{R_s}{r}\right)\dot{t} = k \tag{92}$$

e

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = r^2\dot{\phi} = h. \tag{93}$$

Usando as relações acima em (91) e definindo $u \equiv 1/r$, obtemos

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2 + u^2 = E + \frac{2GM}{h^2}u + \frac{2GM}{c^2}u^3. \tag{94}$$

c) Definina a variável $\bar{u} \equiv u/u_0$. Em termos dessa variável, a equação (88) pode ser reescrita como:

$$\left(\frac{d\bar{u}}{d\phi}\right)^2 = \epsilon(\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u} - \bar{u}_2)(\bar{u} - \bar{u}_3), \tag{95}$$

onde $\bar{u}_1 \equiv u_1/u_0$, $\bar{u}_2 \equiv u_2/u_0$, $\bar{u}_3 \equiv u_3/u_0$ são as raízes de $(d\phi/d\bar{u})^2 = 0$ e $\epsilon \equiv 2GMu_0/c^2$, com $u_0 \equiv (u_1 + u_2)/2$. Mostre que, em primeira ordem em ϵ:

$$\frac{d\phi}{d\bar{u}} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon(\bar{u}-1) + 1 + \frac{3}{2}\epsilon}{[\beta^2 - (\bar{u}-1)^2]^{1/2}}. \tag{96}$$

Na expressão acima, $\beta \equiv (1/2)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$.

Solução: Como a soma das raízes é $1/\epsilon$ e $\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = 2$,

$$\epsilon\bar{u}_3 = 1 - \epsilon(\bar{u}_1 + \bar{u}_2) = 1 - 2\epsilon \tag{97}$$

e, portanto,

$$\left(\frac{d\bar{u}}{d\phi}\right)^2 = (\bar{u} - \bar{u}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u})(1 - \epsilon(2 + \bar{u})). \tag{98}$$

Expandindo em primeira ordem em ϵ:

$$\frac{d\phi}{d\bar{u}} = \frac{1 + \frac{1}{2}\epsilon(2+\bar{u})}{[(\bar{u}-\bar{u}_1)(\bar{u}_2 - \bar{u})]^{1/2}}. \tag{99}$$

Definindo, $\beta \equiv (1/2)(\bar{u}_2 - \bar{u}_1)$ nos permite escrever:

$$\frac{d\phi}{d\bar{u}} = \frac{\frac{1}{2}\epsilon(\bar{u}-1) + 1 + \frac{3}{2}\epsilon}{[\beta^2 - (\bar{u}-1)^2]^{1/2}}. \tag{100}$$

d) Podemos integrar (96) para encontrar o ângulo $\Delta\phi$ entre um afélio e o próximo periélio. Mostre que a precessão periélio a cada ciclo é dada por

$$3\epsilon\pi = \frac{3GM\pi}{c^2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right), \tag{101}$$

onde r_1 e r_2 são os valores de r respectivamente no afélio e no periélio. Sabendo que Mercúrio completa uma órbit a cada 0.24 anos, qual será a precessão do periélio de Mercúrio em um século?

Solução: Integrando o resultado do ítem anterior, obtemos:

$$\Delta\phi = \int_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2} (d\phi/d\bar{u}) d\bar{u} = \tag{102}$$

$$\left[-\frac{1}{\epsilon}\epsilon(\beta^2-(\bar{u}-1)^2)^{1/2}+\left(1+\frac{3}{2}\epsilon)\right)\arcsin\frac{\bar{u}-1}{\beta}\right]_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2}= \tag{103}$$

$$\left(1+\frac{3}{2}\epsilon\right)\pi. \tag{104}$$

Note que $\Delta\phi$ é o ângulo entre um afélio e o próximo periélio. O ângulo entre periélios sucessivos pode ser obtido dobrando $\Delta\phi$:

$$\Delta_{per}=2\pi+3\epsilon\pi=\frac{3GM\pi}{c^2}(u_1+u_2)=\frac{3GM\pi}{c^2}\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}\right). \tag{105}$$

Podemos usar o resultado acima para estimar que a cada século, o periélio de Mercúrio avança cerca de $\simeq 48''$