Lista II - Gabarito

① **Solução:**

a) Para encontrar uma expressão para o período como visto no referêncial do laboratório, vamos considerar a seguinte expressão:

$$T = 4\int_0^b \frac{dx}{v(x)} = \frac{4}{c}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2(x)}}}. \tag{1}$$

Onde na última igualdade usamos $\gamma = 1/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$. A expressão acima diz que o período deve ser 4 vezes o tempo que a partícula leva para ir da origem até a amplitude de oscilação, b. Deste modo, precisamos encontrar uma expressão que parametriza $\gamma(x)$ em termos da posição da partícula.

É possível encontrar essa parametrização se considerarmos a equação de movimento para a partícula

$$\frac{d}{dt}\left[m\gamma v\right] = -kx. \tag{2}$$

Utilizando o Jacobiano para transformar a derivada no tempo em derivada na posição, temos

$$v\frac{d}{dx}\left[m\gamma v\right] = -kx. \tag{3}$$

Substituindo v por γ, obtemos

$$c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2(x)}}\frac{d}{dx}\left[m\gamma c\sqrt{1-\frac{1}{\gamma^2(x)}}\right] = -kx \tag{4}$$

$$= c\frac{\sqrt{\gamma^2(x)-1}}{\gamma}\frac{d}{dx}\left[mc\sqrt{\gamma^2(x)-1}\right]. \tag{5}$$

Portanto,

$$\frac{d\gamma}{dx} = -\frac{kx}{mc^2}. \tag{6}$$

Podemos resolver essa equação usando a condição inicial $\gamma(b) = 1$. Assim,

$$\gamma(x) = 1 + \frac{kb^2}{2mc^2}\left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right). \tag{7}$$

b) Podemos escrever a expressão acima de uma forma mais conveniente se usarmos $\omega = \sqrt{k/m}$:

$$\gamma(x) = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2}\left(b^2 - x^2\right). \tag{8}$$

Podemos reescrever o integrando em 1 como:

$$\frac{\gamma}{\gamma^2 - 1} = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1/2}(\gamma-1)^{1/2}} \tag{9}$$

Substituindo a expressão γ:

$$\frac{1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)}{\left[2 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]^{1/2}\left[\frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]^{1/2}} \tag{10}$$

Expandindo o fator $\left[2 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]$ em série de Taylor

$$\left[2 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right]^{-1/2} \simeq \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{\omega^2}{8c^2}(b^2 - x^2)\right] \tag{11}$$

e substituindo em 1:

$$T = \frac{4}{c}\int_0^b dx \frac{\sqrt{2}c}{\omega\sqrt{b^2 - x^2}}\left[1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)\right] \times \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1 - \frac{\omega^2}{8c^2}(b^2 - x^2)\right] = \tag{12}$$

$$= \frac{4}{\omega}\int_0^b \frac{dx}{\sqrt{b^2 - x^2}}\left[1 + \frac{3\omega^2}{8c^2}(b^2 - x^2) + ..\right]. \tag{13}$$

Integrando o primeiro termo em (13) nos dá o resultado não relativístico, $T_0 = 2\pi/\omega$. O segundo termo é a correção relativística de primeira ordem:

$$\frac{3\omega}{2c^2}\int_0^b dx\sqrt{b^2 - x^2} = \frac{3\omega}{2c^2} \times \frac{b^2\pi}{4} \tag{14}$$

Portanto,

$$T = T_0 + \Delta T, \tag{15}$$

onde $T_0 = 2\pi/\omega$ é o período não relativístico e $\Delta T = 3\omega b^2\pi/(8c^2)$ é a correção relativística doe ordem mais baixa. Podemos entender esse resultado em termos da velocidade máxima que a partícula atinge (em $x = 0$), $V_{max} = \omega^2 b^2$:

$$T = T_0\left(1 + \frac{3}{16}\frac{V_{max}^2}{c^2}\right). \tag{16}$$

c) Para encontrar o período no tempo próprio da partícula, temos que:

$$T_p = 4\int_0^{T_p/4} d\tau = 4\int_0^{T_p/4}\frac{dt}{\gamma} = 4\int_0^b dx\frac{1}{c\sqrt{\gamma^2-1}} \tag{17}$$

De forma análoga ao ítem anterior, encontramos:

$$T_p = T_0\left(1 - \frac{1}{16}\frac{V_{\text{max}}^2}{c^2}\right). \tag{18}$$

② **Solução:** Para encontrar o momento canônico:

$$\vec{P}^i = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V^i} = \frac{\partial}{\partial V^i}\left[-\frac{mc^2}{\gamma(V)}\right] = \frac{mc^2}{\gamma^2}\frac{\partial}{\partial V^i}[\gamma] = \tag{19}$$

$$= \frac{m(1-V^2/c^2)^{-3/2}V}{\gamma^2}\frac{\partial[V]}{\partial V^i} = m\gamma V^i. \tag{20}$$

Para encontrar o Hamiltoniano, fazemos a transformada de Legendre da Lagrangeana:

$$\mathcal{H} = V_i P^i - \mathcal{L} = m\gamma V_i V^i + \frac{mc^2}{\gamma^2} = \tag{21}$$

$$= m\gamma\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right)c^2 + \frac{mc^2}{\gamma^2} = mc^2\gamma. \tag{22}$$

③ **Solução:**

a) A onda total pode ser escrita como:

$$f_{tot}(\boldsymbol{x};t) = Ae^{i(\boldsymbol{k}^i.\boldsymbol{x}-\omega^i t)} + Be^{i(\boldsymbol{k}^r.\boldsymbol{x}-\omega^r t)}, \tag{23}$$

onde $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ e $\boldsymbol{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Tomando $\boldsymbol{x} = 0$, temos a condição de contorno:

$$0 = Ae^{-i\omega^i t} + Be^{-i\omega^r t}. \tag{24}$$

Avaliando em $t = 0$ obtemos:

$$B = -A. \tag{25}$$

Portanto, podemos reescrever (23) como:

$$f_{tot}(\boldsymbol{x};t) = A[e^{i(\boldsymbol{k}^i.\boldsymbol{x}-\omega^i t)} - e^{i(\boldsymbol{k}^r.\boldsymbol{x}-\omega^r t)}]. \tag{26}$$

Fazendo $x = 0$, obtemos que $k_y^r = k_y^i$, $k_z^r = k_z^i$ e $\omega^r = \omega^i$. Ao longo do eixo x sabemos que a onda deve ser um seno puro, uma vez que a onda se anula no plano $x = 0$ (onde o espelho está localizado). Portanto,

$$f_{tot}(x, y = 0, z = 0, t = 0) = C\sin(k_x^i x) = C(e^{ik_x^i x} - e^{-ik_x x}). \tag{27}$$

Ou seja, $k_x^r = -k_x^i$.

b) Na situação em que o espelho está andando ao longo do eixo x com velocidade V, temos a condição de contorno:

$$f_{tot} = (Vt, y, z, t) = 0, \tag{28}$$

que leva a:

$$\omega - k_x V = \omega^r - k_x^r V. \tag{29}$$

Usando a condição (29) e o fato de que $|\boldsymbol{k}| = \omega/c$, depois de um pouco de álgebra, é possível chegar nas relações:

$$\begin{aligned} \omega^r &= \tfrac{\omega\left(1+\beta^2\right)-2k_x V}{1-\beta^2}, \\ k_x^r &= -\tfrac{k_x\left(1+\beta^2\right)-2\omega V/c^2}{1-\beta^2}. \end{aligned} \tag{30}$$

c) Usando que

$$\cos\theta^r = \frac{\boldsymbol{k}^r.\hat{\boldsymbol{x}}}{|\boldsymbol{k}^r|} = \frac{k_x^r c}{\omega^r}, \tag{31}$$

com as relações (30), podemos escrever:

$$\cos\theta^r = \frac{2\beta - \cos\theta(1+\beta^2)}{(1+\beta^2) - 2\beta\cos\theta}. \tag{32}$$

Note que, se $\beta = 0$, então $\cos\theta^r = -\cos\theta$ (como deveria ser pela equação 31) e, portanto, estamos definindo $\theta^r = \pi - \theta$. Para $\beta = 0.5$, temos

$$\cos\theta^r = \frac{1 - (5/4)\cos\theta}{(5/4) - \cos\theta}. \tag{33}$$

Para a onda não ser refletida, $\cos\theta^r > 0$, o que leva a $\cos\theta < 4/5$. Portanto, para ângulos de incidência maiores do que arccos(4/5) a onda não é refletida quando a velocidade do espelho é metade da velocidade da luz. Podemos entender ess resultado de forma mecânica: se a luz fosse feita de partículas, isso significaria que depois de atingir o espelho, essas partículas não possuem momento indo no sentido negativo de x. É claro que isso vai depender da componente x do momento quando a partícula atinge o espelho, que é tão menor quanto maior for o ângulo de incidência.

d) Podemos escrever a função de onda em notação relativística em termos de uma fase que é um escalar de Lorentz. Ou seja, a partir da contração da quadri-posição $r^\mu = (ct, x, y, z)$ com o quadri-vetor de onda $k_\mu = (-\omega/c, k_x, k_y, k_z)$:

$$f \sim e^{i\phi}, \tag{34}$$

onde $\phi = k_\mu x^\mu$.

e) Sabemos que no referêncial que se move, S', $\cos\theta^{r'} = -\cos\theta'$ e no referêncial do laboratório, S, $\cos\theta^{r'} \neq -\cos\theta'$. O que queremos é $\cos\theta^r = f(\cos\theta)$. As relações entre as quantidades em S e S' são dadas pelas transformações de Lorentz (de S' para S):

$$\frac{\omega}{c} = \gamma(\frac{\omega'}{c} + \beta k_x') \tag{35}$$

e

$$k_x = \gamma(k'_x + \beta\frac{\omega'}{c}). \tag{36}$$

Portanto,

$$\cos\theta = \frac{k_x c}{\omega} = \frac{\cos\theta' + \beta}{1 + \beta\cos\theta'}. \tag{37}$$

Usando essa relação e o fato de que $\cos\theta^r = -\cos\theta'$ no laboratório, podemos recuperar o resultado

$$\cos\theta^r = \frac{2\beta - \cos\theta(1+\beta^2)}{1+\beta^2 - 2\beta\cos\theta}. \tag{38}$$

④ **Solução:** Podemos escrever os campos elétrico e magnético em termos do tensor eletromagnético como:

$$E_i = cF_{0i} \tag{39}$$

e

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}, \tag{40}$$

Onde o tensor eletromagnético é definido por:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \tag{41}$$

Com A_μ o quadri-vetor. Se aplicarmos uma transformação de calibre em A_μ da forma

$$A_\mu \to A_\mu + \partial\lambda/\partial x^\mu \tag{42}$$

e desde que $[\partial_0, \partial_i] = 0$, então é trivial ver que os campos E_i e B_i permanecerão invariantes.

⑤ **Solução:** Podemos escrever o determinante de uma matriz em termos do símbolo de Levi-Civita como:

$$\det(M) = \epsilon_{\mu\nu\beta\delta}M^\mu{}_0 M^\nu{}_1 M^\beta{}_2 M^\delta{}_3 \tag{43}$$

e, portanto,

$$\epsilon_{abcd}\det(M) = \epsilon_{\mu\nu\beta\delta}M^\mu{}_a M^\nu{}_b M^\beta{}_c M^\delta{}_d \tag{44}$$

Podemos escrever essa identidade para a matriz de transformação de Lorentz, Λ. Como $\det(\Lambda) = 1$, então por (44) segue que o símbolo de Levi-Civita é invariante por transformações de Lorentz.

⑥ **Solução:** a) Todo *boost* de Lorentz em uma direção arbitrária pode ser decomposto em um *boost* seguido ou precedido de uma rotação espacial, sem alterar a componente temporal. Portanto, quando não há velocidade entre os dois referênciais, a transformação de Lorentz se reduz a

$$\Lambda^{\mu}_{\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & \overrightarrow{0} \\ \overrightarrow{0} & R^{i}_{j} \end{pmatrix}, \tag{45}$$

onde R^i_j é uma matriz de rotação.

b) Escrevendo os campos elétrico e magnético como

$$E_i = cF_{0i} \tag{46}$$

e

$$B_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}F^{jk}, \tag{47}$$

sob uma transformação do tipo (45), esses campos vão se transformar como:

$$E'_i = cF'_{0i} = c\Lambda_0{}^{\mu}\Lambda_i{}^{\nu}F_{\mu\nu} = R_i{}^{j}F_{0j} = R_i{}^{j}E_j \tag{48}$$

e

$$B'_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\Lambda^{j}{}_{\mu}\Lambda^{k}{}_{\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}R^{j}{}_{l}R^{k}{}_{m}F^{lm} \tag{49}$$

Portanto,

$$R^{i}{}_{n}B'_i = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}R^{j}{}_{l}R^{k}{}_{m}R^{i}{}_{n}F^{lm} = -\frac{1}{2}\epsilon_{lmn}F^{lm} = B_n \tag{50}$$

⑦ **Solução:** a) Vamos considerar um boost na direção $\hat{\boldsymbol{x}}$ e encontrar como as componentes do tensor eletromagnético se transformam:

$$F'^{01} = E_x, \quad F'^{02} = \gamma[E_y - \beta B_z], \quad F'^{03} = \gamma[E_z + \beta B_y], \tag{51}$$

$$F'^{12} = \gamma[B_z - \beta E_y], \quad F'^{13} = -\gamma[\beta E_z + B_y], \quad F'^{23} = B_x. \tag{52}$$

Como o tensor eletromagnético é anti-simétrico, nós só precisamos saber as componentes a cima. Portanto, os campos vão se transformar como:

$$\boldsymbol{E}' = E_x\hat{\boldsymbol{x}} + \gamma[E_y\hat{\boldsymbol{y}} + E_z\hat{\boldsymbol{z}}] + \gamma[\beta B_y\hat{\boldsymbol{z}} - \beta B_z\hat{\boldsymbol{y}}] \tag{53}$$

e

$$\boldsymbol{B'} = B_x\hat{\boldsymbol{x}} + \gamma[B_y\hat{\boldsymbol{y}} + B_z\hat{\boldsymbol{z}}] + \gamma[\beta E_z\hat{\boldsymbol{y}} - \beta B_y\hat{\boldsymbol{z}}]. \tag{54}$$

Como o boost é na direção $\hat{\boldsymbol{x}}$, o terceiro termo em (53) e (54) são, respectivamente, $\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}$ e -$\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}$. Poranto, podemos inferir que para um boost numa direção arbitrária os campos vão se transformar como:

$$\begin{array}{l} \mathbf{E}'_\perp = \gamma\left(\mathbf{E}_\perp + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}\right) \\ \mathbf{B}'_\perp = \gamma\left(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{E}\right) \end{array}. \tag{55}$$

b)

$$\boldsymbol{E'} \times \boldsymbol{B'} = 0 = \gamma^2[\boldsymbol{E} + \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}] \times [\boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}] = \tag{56}$$

$$\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} - \boldsymbol{\beta}(E^2 + B^2) + (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}) \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}), \tag{57}$$

mas

$$(\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{E}) \times (\boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{B}) = \beta^2(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B})\hat{\boldsymbol{\beta}} \tag{58}$$

e, portanto,

$$\frac{\boldsymbol{\beta}}{(1+\beta^2)} = \frac{\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}}{E^2 + B^2}. \tag{59}$$

c) A quantidade

$$G_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -4\boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{E}, \tag{60}$$

onde $G_{\mu\nu}$ é o dual de Hodge, é invariante e portanto se os campos $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{B}$ forem perpendiculares em um referêncial, então serão também em todos os referênciais.