Cálculo I

Renan Isquierdo Boschetti

29 de maio de 2025

Sumário

1 Limite e continuidade

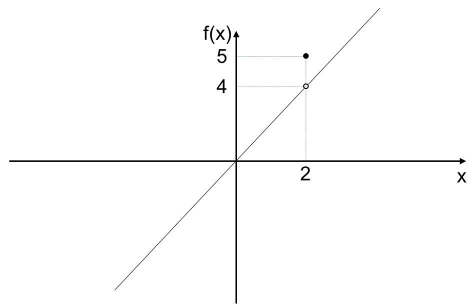
1.1 Ideia intuitiva de limite

O objetivo desta seção é esclarecer a ideia de limite de uma função. Não nos preocuparemos em apresentar a definição precisa e rigorosa de limite, mas sim dar uma ideia intuitiva. As técnicas para calcular um limite serão introduzidas numa seção posterior.

Considere a função chave:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & se\ x \neq 2 \\ 5, & se\ x = 2 \end{cases}$$

Um esboço do gráfico desta função é o que se segue:



Estamos interessados em saber para qual valor tende $f(x)$ quando x tende para 2, isto é, quando x se aproxima muito de 2, para qual valor $f(x)$ converge? Se tomarmos x=1,97 teremos $f(1,97)$=3,94, se nos aproximarmos mais ainda de 2 fazendo x=1,98, então, $f(1,98)$=3,96. Notamos que, conforme nos aproximamos de x=2, a função se aproxima cada vez mais de 4, embora nunca assuma exatamente 4, ou seja, a função converge para 4. Deste modo, quando x tende a 2 então $f(x)$ tende a 4, embora $f(4) = 5$.

$$\begin{aligned} f(1,97) &= 3,94 \\ f(1,98) &= 3,96 \\ f(1,99) &= 3,98 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Uma outra maneira de expressar esse fato é: O limite (valor para o qual a função tende) de$f(x)$ quando x tende a 2 é igual a 4, ou em símbolos matemáticos:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4 \tag{1}$$

Genericamente podemos escrever o limite de uma função de $f(x)$ quando x tende a um número "a"como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Assim, a palavra **"limite" significa "valor para o qual a função tende (converge)".**

1.2 Calculando os limites: Manipulações Algébricas

Após entendermos intuitivamente o que significa um limite precisamos de técnicas para calcula-los. Nesta seção serão apresentadas algumas técnicas para calcular limites.

Técnicas para calcular limites: Simplesmente Substituição

Na seção anterior calculamos um limite simplesmente substituindo x por valores próximos ao valor de interesse e vimos para qual valor a função tende. Na prática, os limites mais simples são calculados de maneira similar, por exemplo, se queremos calcular o limite de $f(x) = x^2$ quando x tende a 2, ou em símbolos matemáticos:

$$\lim_{x \to 2} x^2 =? \tag{2}$$

Podemos fazer como na seção anterior tomando valores cada vez mais próximos de 2 e calculando $f(x)$, mas na prática podemos simplesmente substituir $x = 2$ e calcular$f(x)$ e, então, constatamos que o limite será 4.

Aqui encontramos a primeira e mais simples técnica para calcular limites: "Se não há nenhuma indeterminação quando substituímos o valor para o qual x tende na função, então o limite pode ser calculado **simplesmente por substituição** ".

Por **"indeterminações"** entendemos expressões do tipo $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \times \infty, \infty - \infty, 1^{\infty}, 0^0$.

Técnicas para calcular limites: Propriedades dos Limites

Os limites possuem algumas propriedades que podem e devem ser utilizadas para calculá-los. Abaixo $L_1 = lim_{x \to p} f(x)$ e $L_2 = lim_{x \to p} g(x)$

Propriedade 1

$\lim_{x \to p}[f(x) \pm g(x)] = L_1 \pm L_2 = \lim_{x \to p} f(x) \pm \lim_{x \to p} g(x)$

"O limite da soma (e da diferença) é igual a soma (diferença) dos limites"

Proprierade 2

$\lim_{x \to p} kf(x) = k \lim_{x \to p} f(x)(k \; constante)$

Propriedade 3

$\lim_{x \to p} f(x)g(x) = L_1 L_2 = \lim_{x \to p} f(x) \lim_{x \to p} g(x)$

"O limite da multiplicação é a multiplicação dos limites"

Propriedade 4

$\lim_{x \to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L_1}{L_2}, \; desde \; que L_2 \neq 0$

"O limite da divisão é a divisão dos limites"

Propriedade 5

$\lim_{x\to p} f(g(x)) = f(\lim_{x\to p} g(x))$

EXEMPLO 1.2.1 Calcule $\lim_{x\to 1} ln(\frac{x-1}{x^2})$.

Solução: Utilizando a propriedade 5:

$$\lim_{x\to 1} ln(\frac{x-1}{x^2}) = ln(\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x^2}) = 0$$

Técnicas para calcular limites: Fatoração

Um exemplo de limite que nos leva a uma indeterminação é:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} \tag{3}$$

Se simplesmente substituirmos x por 2 teremos uma expressão do tipo "$\frac{0}{0}$", portanto, temos que fazer uma manipulação algébrica antes de substituirmos o valor para o qual x tende. Uma alternativa que deve sempre ser verificada neste tipo de indeterminação é a possibilidade de usar uma **fatoração** para eliminar a indeterminação. Este método permitirá o cancelamento do fator que está zerando o numerador e o denominador da fração. No exemplo acima, identificamos uma diferença de quadrados no numerador e fatoramos:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 \tag{4}$$

Após a fatoração, o termos $(x-2)$ foi cancelado e agora podemos resolver o limite simplesmente substituindo x por 2, já que a indeterminação foi eliminada:

$$\lim_{x\to 2} x+2 = 4 \tag{5}$$

EXEMPLO 1.2.2. Calcule $\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$

Solução: Neste limite podemos identificar uma diferença de quadrados no denominador:

$$\lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{(\sqrt{x}-\sqrt{3})(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}} \tag{6}$$

EXEMPLO 1.2.3 Calcule $\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{x-2}$

Solução:

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{(\sqrt[4]{x}^2)^2-(\sqrt[4]{2}^2)^2} = \tag{7}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{(\sqrt[4]{x}^2+\sqrt[4]{2}^2)(\sqrt[4]{x}^2-\sqrt[4]{2}^2)}=\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2}}{(\sqrt[4]{x}^2+\sqrt[4]{2}^2)(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{2})} \tag{8}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{1}{(\sqrt[4]{x}^2+\sqrt[4]{2}^2)(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{2})}=\frac{1}{4\sqrt[4]{8}} \tag{9}$$

Note que, no lado direito de (8), quando cortamos os fatores iguais no numerador e no denominador, a indeterminação $\frac{0}{0}$ que tínhamos desaparece e, então, podemos resolver o limite por simples substituição. Portanto, o objetivo de utilizar a fatoração é eliminar a indeterminação.

EXEMPLO 1.2.4 Calcule $\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}$, com p constante.

Solução: Neste exemplo vamos dar uma fórmula geral para calcular limites deste tipo:

$$\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}=\lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{y^n-y_0^n}= \tag{10}$$

onde $y=\sqrt[n]{x}$ e $y_0=\sqrt[n]{p}$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{y-y_0}{(y-y_0)(y^{n-1}+y_0y^{n-2}+...+y_0^{n-2}y+y_0^{n-1})} \tag{11}$$

$$=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{y^{n-1}+y_0y^{n-2}+...+y_0^{n-2}y+y_0^{n-1}}=\frac{1}{ny_0^{n-1}}$$

voltando à constante original:

$$=\frac{1}{n\sqrt[n]{p}^{n-1}}$$

EXEMPLO 1.2.5 Calcule $\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{5}}{x-5}$

Solução: Neste exemplo usaremos o método do exemplo anterior para resolver um limite do tipo $\lim_{x\to p}\frac{\sqrt[n]{x}-\sqrt[n]{p}}{x-p}$ no caso $n=5$ e $p=5$

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{5}}{x-5}=\lim_{x\to 5}\frac{y-y_0}{(y-y_0)(y^4+y^3y_0+y^2y_0^2+yy_0^3+y_0^4)}$$

$$\lim_{x\to 5}\frac{1}{(y^4+y^3y_0+y^2y_0^2+yy_0^3+y_0^4)}$$

Fazendo o limite por substituição e voltando a constante original:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt[5]{x}-\sqrt[5]{5}}{x-5}=\frac{1}{5\sqrt[5]{5}^4}$$

EXEMPLO 1.2.6 Calcule $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+3x-4}$

Solução: Neste limite, encontramos novamente a indeterminação "$\frac{0}{0}$"que nos impede de resolver o limite por simples substituição. Para vencer essa dificuldade apresentaremos um outro tipo de manipulação algébrica, onde, identificaremos que o valor para o qual x tende, no caso 1, é raiz de ambos, numerador e denominador. Assim, podemos usar um teorema de álgebra para fatorar esses polinômios em uma multiplicação de $(x-1)$ por um outro polinômio de grau adequado. Para isso, podemos utilizar divisão de polinômios, Briof-Ruffini, ou utilizar a identidade de polinômios apresentada abaixo:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+3x-4}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x^3+x^2+x+4)}$$

Neste passo encontramos os polinômios que multiplicam $(x-1)$ da seguinte maneira:

$$x^3-1=(x-1)(ax^2+bx+c)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c$$

Essa igualdade só se verifica se os coeficientes do lado direito forem iguais aos coeficientes do lado esquerdo, ou seja, $a=1$, $b=1$ e $c=1$. Voltando ao limite, agora podemos substituir x por 1, pois não há mais uma indeterminação:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+4}=\frac{3}{4}$$

Técnicas para calcular limites: Multiplicação pelo Conjugado

Em alguns casos, identificamos a indeterminação do tipo "$\frac{0}{0}$", mas não conseguimos de imediato identificar uma fatoração. Vamos analisar o exemplo abaixo:

EXEMPLO 1.2.7 Calcule $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{2x+3}-\sqrt{5}}$

Solução: Este é um outro exemplo clássico de limites onde usaremos mais uma vez o truque da fatoração. Entretanto, precisamos manipular a expressão para poder identificar, neste caso, uma diferença de quadrados. Uma maneira de fazer isso, é **multiplicar o numerador e denominador pelo conjugado do denominador**:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{(\sqrt{2x+3}-\sqrt{5})(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})} =$$

Aqui vale ressaltar que NUNCA valerá a pena fazer a distributiva no numerador, só iremos abrir a expressão no denominador.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(x-1)} =$$

Agora é só identificar a diferença de quadrados no denominador. Note que $(x-1)$ é $(\sqrt{x}^2 - 1^1)$ então, podemos abrir o denominador em uma diferença de quadrados:

$$\lim_{x \to 1} \frac{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{2x+3}+\sqrt{5})}{2(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Sempre a dica é tentar identificar a diferença de quadrados no fator responsável pela indeterminação, neste caso, $(\sqrt{x}-1)/(x-1)$.

Exercícios 1.2

1.2.1 Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{x}$

b) $\lim_{x\to p} \frac{x^3-p^3}{x-p}$

c) $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} \frac{9x^2-1}{3x+1}$

d) $\lim_{x\to p} \frac{x^n-p^n}{x-p}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

f) $\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}}$

g) $\lim_{x \to 1} \frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}$

h) $\lim_{x \to 7} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{7}}{\sqrt{x+7}-\sqrt{14}}$

1.3 Calculando Limites: Limites no infinito

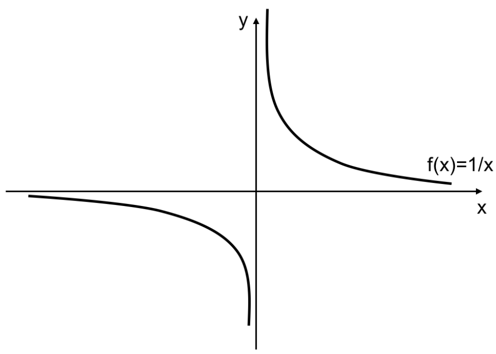
Nesta seção iremos apresentar técnicas para calcular limites envolvendo o infinito. Quando escrevemos:

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = L$$

Queremos dizer que x assume valores arbitrariamente grandes, negativos ou positivos. Portanto, este limite nos diz qual é o comportamento da função quando tomamos um valor de x tão grande quanto queiramos. Um exemplo ilustrativo é o seguinte:

EXEMPLO 1.3.1 Calcule intuitivamente $\lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x}$

Solução: A intuição para calcular esse limite é a seguinte: Imaginaremos que x assume valores muito grandes, por exemplo, x=100.000, então $f(100000) = \frac{1}{100000} = 0,000001$. E quanto maior o valor de x, mais próximo de 0 estará $f(x)$ e, assim, o limite será 0. Esse resultado também pode ser visto com o gráfico da função:



É importante ressaltar que dividindo qualquer número finito por x elevado a qualquer potência maior do que 1, o limite será igual a zero. Assim como o será se for uma potência fracionária ($\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$). Assim, o truque para resolver os limites envolvendo infinito será sempre encontrar as funções $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^n}$ ou $\frac{1}{x^{\frac{1}{n}}}$ pois sabemos que seus limites quando $x \to \pm\infty$ valem zero.

EXEMPLO 1.3.2 Calcule $\lim_{x \to \infty} \frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}$

Solução: Para resolver esse limite basta **colocar em evidência o termo de maior grau** no denominador e no numerador, desta forma, aparecerão termos $\frac{1}{x}$ os quais serão nulos depois de tomado o limite.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^5+x^4+1}{2x^5+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5})}{x^5(2+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5})}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^5}}{2+\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^5}}=\frac{1}{2}$$

EXEMPLO 1.3.3 Calcule $\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-x$

Solução: Neste limite encontramos pela primeira vez a indeterminação do tipo $\infty-\infty$. Como não temos um denominador para usar o truque do exemplo anterior, vamos inserir um denominador **multiplicando o numerador e o denominador pelo conjugado** da expressão original. Esse será o truque que usaremos nestes casos.

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+2}-x=\lim_{x\to-\infty}\frac{(\sqrt{x^2+2}-x)(\sqrt{x^2+2}+x)}{\sqrt{x^2+2}+x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{\sqrt{x^2+2}+x}=0$$

Exercícios 1.3.1

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+3}{3x^2+x+1}$

b) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x^2+3}$

c) $\lim_{x\to+\infty}[x-\sqrt{x^2+1}]$

d) $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

e) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$

1.4 Limites laterais

Quando estamos na reta real e fazemos x se aproximar de um número p, podemos fazer essa aproximação de duas maneiras: Aproximar p por valores maiores do que p, ou aproximar p por valores menores do que p. Por exemplo, se fizermos o limite $\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}$, podemos nos aproximar de zero por valores maiores do que zero ou por valores menores do que zero, se o fizermos por valores maiores do que zero, utilizaremos a notação $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ (x tendendo a zero pela direita), no outro caso utilizaremos $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$ (x tendendo a zero pela esquerda).

EXEMPLO 1.4.1 Calcule intuitivamente $\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}$ e $\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x}$

Solução: $x \to 0^+$ significa x assumindo valores próximos de zero, porém maiores do que zero, digamos 0,0000001:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} \simeq \frac{1}{0,0000001} = 10000000$$

Quanto menor o valor de x que escolhermos maior será o valor de $f(x)$, pois estamos dividindo 1 por um número tão próximo de zero quanto queiramos. Então concluímos que:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x} = \infty$$

E utilizando um raciocínio análogo:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} \simeq \frac{1}{-0,0000001} = -10000000$$

E então:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{x} = -\infty$$

EXEMPLO 1.4.2 Calcule $\lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x-1}$ e $\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x-1}$

Solução: Usaremos novamente a intuição para calcular esse limite, imaginaremos x tomando valores cada vez mais próximos de 1 pela direita (valores maiores do que 1) e pela esquerda (valores menores do que 1):

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} \simeq \frac{1}{1,001-1} = \frac{1}{0,001} = 1000$$

E então percebemos que quanto mais nos aproximamos de 1 por valores um pouco maiores que 1, então $f(x)$ assumirá valores grandes e, portanto:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty \tag{12}$$

Utilizando raciocínio análogo:

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

Exercícios 1.4.1

a) $\lim_{x\to 3^+} \frac{5}{3-x}$

b) $\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2+3x}{x^2-4}$

c) $\lim_{x\to 1^+} \frac{x^3-1}{x^2-2x+1}$

d) $\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$

e) $\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$

1.5 Assíntotas horizontais e verticais

Uma assíntota é uma reta para a qual a função se aproxima, mas nunca toca, quando x se aproxima de algum valor do domínio. Neste curso, estudaremos dois tipos de assíntotas: Horizontais e verticais.

Assíntotas horizontais

Uma assíntota horizontal é uma reta horizontal $y = constante$ para a qual a função se aproxima arbitrariamente quando x assume valores arbitrariamente grandes. Para encontrar assíntotas horizontais de uma função, basta fazer o limite $lim_{x\to\pm\infty} f(x)$. Caso este limite seja igual a uma constante a, então $y = a$ é a assíntota horizontal.

EXEMPLO 1.5.1 Verifique se a função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ apresenta assíntota horizontal.

Solução: Como a função é par, basta fazer $x \to +\infty$.

$$lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x^2+1} = \frac{1}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

Portanto, $y = 1$ é uma assíntota horizontal. Note que ó gráfico desta função se aproxima de 1 quando $x \to \infty$.

Assíntotas verticais

Uma assíntota vertical é uma reta vertical $x = a$ para a qual o gráfico da função se aproxima arbitrariamente quando $x \to a^{\pm}$. Em geral encontramos assíntotas verticais em valores de x que estão fora do domínio da função. Deste modo, para encontrar uma assíntota vertical, basta fazer o limite $lim_{x\to a^{\pm}} f(x)$, onde $x = a \notin D_f$. Se o limite $\lim_{x\to a^{\pm}} = \pm\infty$, então $x = a$ é uma assíntota vertical.

EXEMPLO 1.5.2 Verifique se a função $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$ possuí assíntotas verticais.

Solução: O domínio da função é $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 1\}$. Portanto, devemos procurar assíntotas verticais aproximando x de ± 1, pela esquerda e pela direita, se um dos limites for $\pm\infty$, então $x = \pm 1$ é assíntota vertical.

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} \simeq \frac{1}{1,00...1-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} \simeq \frac{1}{0,99...9-1} = -\infty$$

Portanto, $x = 1$ e $x = -1$ são assíntotas verticais.

EXEMPLO 1.5.3 Analise as assíntotas de $\frac{3x^2+x+1}{\sqrt{x^4-8}}$.

Solução: Para encontrar as assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2+x+1}{\sqrt{x^4-8}} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}} = 3$$

Portanto, $y = 3$ é uma assíntota horizontal.

Para encontrar assíntotas verticais, devemos primeiro determinar o domínio: $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq \sqrt[4]{8}\}$. Deste modo, devemos procurar assíntotas verticais aproximando x de $\sqrt[4]{8}$ pela direita e de $\sqrt[4]{8}$ pela esquerda:

$$\lim_{x\to\pm\sqrt[4]{8}^{\pm}} \frac{3x^2+x+1}{\sqrt{x^4-8}} = +\infty$$

Assim, $x = \sqrt[4]{8}$ e $x = -\sqrt[4]{8}$ são assíntotas verticais.

Exercícios 1.5.1

a) Analise as assíntotas de $f(x) = ln\left(\frac{x^2+1}{x^2+2}\right)$.

b) Analise as assíntotas de $f(x) = \frac{3x^2+x+1}{\sqrt{x^4-8x}}$.

c) Analise as assíntotas de $f(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2-2}}$.

d) Analise as assíntotas de $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2+1}}{3x-5}$.

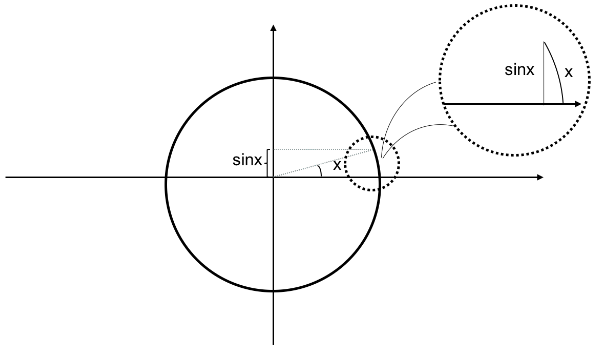
e) (Desafio) Analise as assíntotas de $f(x) = \frac{sin(x)}{\sqrt[3]{x^3+1}}$.

1.6 O limite fundamental trigonométrico

Sabemos que $\sin 0 = 0$ e, portanto, $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$. O objetivo desta seção é mostrar intuitivamente que

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Para dar uma intuição geométrica desse resultado, vamos considerar o circulo trigonométrico:



Como mostra a figura, no círculo trigonométrico o seno de um arco x é a projeção do ponto sobre o círculo no eixo y. Quando fazemos esse arco com x cada vez menor, vemos pela figura que o seno do arco fica com comprimento cada vez mais parecido com o comprimento do próprio arco. Sabendo que o círculo trigonométrico tem raio 1, então o comprimento do arco é o próprio x e, assim, vemos intuitivamente que $sen(x) \approx x$ quando x é muito pequeno.

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(x)}{x} = 1 \tag{13}$$

EXEMPLO 1.6.1 Calcule $\lim_{x\to 0} \frac{sen(5x)}{x}$

Solução: Não podemos dizer que esse limite vale 1 porque o argumento do seno não é igual ao denominador. Antes de aplicar o limite fundamental devemos deixar o denominador igual ao argumento do seno, para fazer isso, basta multiplicar numerador e denominador por 5 e obtemos:

$$\lim_{x\to} \frac{sen(5x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{5sen(5x)}{5x} = \lim_{x\to 0} 5 \times \lim_{x\to 0} \frac{sen(5x)}{5x} = 5$$

Está estratégia será muito útil para resolver limites que envolvam funções trigonométricas: **Manipular o limite até encontrar o limite fundamental.**

EXEMPLO 1.6.2 Calcule $lim_{x\to 0}\frac{sen(ax)}{sen(bx)}$ a e b constantes.

Solução: Neste limite procederemos como no exemplo anterior: aparecemos com o argumento do seno no numerador e no denominador multiplicando numerador e denominador por este argumento, mas nesse exemplo teremos que fazer isso para ax e bx:

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(ax)}{sen(bx)}=\lim_{x\to 0}\frac{sen(ax)}{ax}\frac{bx}{sen(bx)}\frac{ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

EXEMPLO 1.6.3 Calcule $\lim_{x\to -1}\frac{tan^3(\frac{x+1}{4})}{(x+1)^3}$

Para resolver qualquer limite envolvendo funções trigonométricas vamos sempre buscar o limite fundamental, um primeiro passo seria escrever a tangente como o quociente entre o seno e o cosseno, mas vamos simplificar mais ainda e dizer que a tangente, assim como o seno, também se comporta como a função $y = x$ próximo da origem, ou seja, $tan(x) \approx x$ quando $x \to 0$ e portanto $\lim_{x\to 0}\frac{tan(x)}{x} = 1$. Agora basta encontrarmos esta nova versão do limite fundamental:

$$\lim_{x\to -1}\frac{tan^3(\frac{x+1}{4})}{(x+1)^3}=\lim_{u\to 0}\frac{tan^3(u)}{4^3u^3}=$$

Onde definimos a nova variável $u=\frac{x+1}{4}$ a qual tende a zero se x tende a -1.

$$=\lim_{u\to 0}\frac{tan^3(u)}{u^3}\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$$

Já que o limite da multiplicação é a multiplicação dos limites.

Nota: Ao resolver limites podemos substituir variáveis desde que nos atentemos para qual valor esta nova variável tende.

EXEMPLO 1.6.4 Calcule $\lim_{x\to 1}\frac{sen(\pi x)}{x-1}$

Solução: Novamente vamos buscar o limite fundamental usando o recurso de multiplicar numerador e denominador pelo mesmo fator, mas antes notamos que $sen(\pi x-\pi) = sen(\pi x)cos(\pi)$

$$\lim_{x\to 1}\frac{sen(\pi x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi sen(\pi x)cos(\pi)}{(\pi x-\pi)cos(\pi)}=\lim_{x\to 1}\frac{\pi sen(\pi x-\pi)}{cos(\pi)(\pi x-\pi)}=-\pi$$

EXEMPLO 1.6.5 Calcule $\lim_{x\to\infty}(1+x)^{xsen(\frac{1}{x})}$.

Solução:

$$lim_{x\to\infty}(1+x)^{xsen(\frac{1}{x})} = \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{sen(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}} = \infty$$

Pois, $\lim_{x\to\infty}\frac{sen(\frac{1}{x})}{\frac{1}{x}} = 1$

Exercícios 1.6.1

Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x\to 13\pi}\frac{sen(x+sen(x))}{cos(13\pi)}$

b) $\lim_{x\to 0}\frac{x+senx}{x^2-senx}$

c) $\lim_{x \to p} \frac{tg(x-p)}{x^2-p^2}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{x-tgx}{x+tgx}$

e) $\lim_{x \to \infty}(1+\frac{1}{x})^{xsen(\frac{1}{x})}$

1.7 O limite fundamental Exponencial

O número e é um número irracional que é definido da seguinte maneira:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e \tag{14}$$

Ou de maneira equivalente, fazendo $h = \frac{1}{x}$:

$$\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e \tag{15}$$

Os limites (14) e (15) são conhecidos com o limite fundamental exponencial e o seu valor é $e = 2,718281828.....$ Para resolver limites desse tipo vamos sempre procurar pelo limite fundamental.

EXEMPLO 1.7.1 Calcule $\lim_{x\to-\infty}(\frac{2x-1}{1+2x})^{3x}$

Solução: Sempre que vermos um limite que tem uma estrutura parecida com o limite fundamental exponencial (14) ou (15), vamos modificar a expressão até encontrarmos estes limites. O primeiro passo neste exemplo é colocar $2x$ em evidência no numerador e denominador:

$$\lim_{x\to-\infty}(\frac{2x-1}{1+2x})^{3x} = \lim_{x\to-\infty}(\frac{1-\frac{1}{2x}}{1+\frac{1}{2x}})^{3x} = \lim_{x\to-\infty}[\frac{(1-\frac{1}{2x})}{(1+\frac{1}{2x})}]^{3x}$$

Agora chegamos muito perto do limite fundamental, é hora de olhar para a expressão e tentar encontrar uma substituição de variáveis que faça aparecer (15). Podemos separar em dois limites, um no denominador e outro no numerador, utilizando a propriedade de que o limite do quociente é o quociente dos limites:

$$[\frac{\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{2x})^x}{\lim_{x\to-\infty}(1+\frac{1}{2x})^x}]^3 =$$

Agora podemos fazer duas substituições de variáveis, $u = -\frac{1}{2x}$ e $v = \frac{1}{2x}$:

$$= [\frac{\lim_{u\to 0}(1+u)^{-\frac{1}{2u}}}{\lim_{v\longrightarrow 0}(1+v)^{\frac{1}{2v}}}]^3 =$$

Identificamos que o limite no numerador é exatamente o limite fundamental na forma (15) com o expoente $-\frac{1}{2}$ e o de baixo é o mesmo limite com expoente $\frac{1}{2}$. Tomando o limite:

$$= (\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}})^3 = e^{-3}$$

EXEMPLO 1.7.2 Calcule $\lim_{x \to 0} \frac{3^{2x}-1}{x}$

Solução: Mais uma vez vamos procurar o limite fundamental nessa expressão. O primeiro passo é fazer a substituição de variáveis $u = 3^{2x}-1 \Rightarrow 3^{2x} = u+1$, aplicando ln em ambos os lados e usando a regra do tombo dos logaritmos $2xln3 = ln(u+1) \Rightarrow x = \frac{ln(u+1)}{2ln3}$. Fazendo as substituições no limite original:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^{2x}-1}{x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{ln(u+1)}{2ln3}} =$$

Utilizando mais uma vez a regra do tombo, mas desta vez para subir o expoente $\frac{1}{u}$:

$$= \lim_{u \to 0} \frac{2ln3}{ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}$$

Tomando o limite:

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^{2x}-1}{x} = 2ln3$$

Exercícios 1.7.1

Calcule os seguintes limites:

a) $lim_{x \to 0}(1 + 2x)^{\frac{1}{x}}$

b) $\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}$

c) $\lim_{x \to +\infty}(1 + \frac{1}{x})^{2x}$

d) $\lim_{x \to 0} \frac{e^{2x} - 1}{x}$

e) $\lim_{x \to 1} \frac{3^{\frac{x-1}{4}} - 1}{sin[5(x-1)]}$

1.8 Continuidade de uma função

Intuitivamente podemos dizer que uma função é contínua se podemos esboçar seu gráfico sem que tiremos o lápis do papel.

Agora que temos a ferramenta do limite podemos deixar um pouco mais formal a definição de continuidade:

Função Contínua. Uma função é contínua em um ponto p, se e somente se, o limite da função quando x tende a p existe e é igual ao valor que a função assume em p. Em símbolos matemáticos:

$$\textit{f(x) é contínua} \Leftrightarrow \lim_{x\to p} f(x) = f(p)$$

$$\lim_{x\to p} f(x) \ \textit{existe} \Leftrightarrow \lim_{x\to p^+} f(x) = \lim_{x\to p^-} f(x) = L$$

"O limite de $f(x)$ quando x tende a p existe, se somente se, o limite de $f(x)$ pela direita for igual ao limite de $f(x)$ pela esquerda"

Note que só podemos falar em continuidade em um ponto. Se a função for contínua em todos os pontos, então dizemos que a função é contínua.

EXEMPLO 1.8.1 (O limite não existe e a função não é contínua) Considere a função e verifique se é contínua em $p = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \ se \ x < 2 \\ 2x, \ se \ x \geq 2 \end{cases}$$

Solução: Calculando os limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x = 4$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} 1 = 1$$

Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$, então segue que o limite quando $x \ \to 2$ não existe e, se o limite não existe, então a função não pode ser contínua em $x = 2$.

EXEMPLO 1.8.2 (O limite existe mas a função não é contínua) Considere a função e verifique se é contínua em $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, \ se \ x \neq 2 \\ 5, \ se \ x = 2 \end{cases} \tag{16}$$

Solução: Pelo gráfico a intuição nos diz que essa função não pode ser contínua em $x = 2$, mas vamos calcular os limites laterais:

$$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} 2x = \lim_{x\to 2^-} f(x) = 4 \tag{17}$$

Como os limites laterais coincidem, então o limite em $x = 2$ existe e vale 4. Se não soubéssemos o gráfico dessa função e, se estivéssemos nesse ponto, teríamos que considerar a possibilidade dessa função ser contínua e teríamos que checar se o limite quando $x \to 2$ coincide com $f(2)$, mas $f(2) = 5 \neq \lim_{x\to 2} f(x) = 4$ e portanto a função não é contínua em $x = 2$.

EXEMPLO 1.8.3 (O limite existe e a função é contínua) Considere a função $f(x) = 2x$ e verifique se é contínua em $x = 2$.

Solução: Pelo gráfico, essa função não apresenta nenhum "salto", então devemos desconfiar que ela é contínua em qualquer ponto, em particular em $x = 2$. Vamos testar:

Obviamente os limites laterais em $x = 2$ coincidem e valem ambos 4. Como $f(2) = 4$ então segue que a função é contínua em $x = 2$. Em geral, **todo polinomio é contínuo em todos os pontos de seu domínio.**

EXEMPLO 1.8.4 Determine o conjunto de pontos em que a função $f(x)$ é contínua:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, \ se\ x \geq 1 \\ \dfrac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3}, \ x < 1 \end{cases}$$

Solução: Para x menor do que 1 a função é o quociente entre dois polinômios, ambos são funções contínuas. Os únicos pontos que temos que verificar continuidade são aqueles que fazem com que o denominador se anule. No caso, as raízes do denominador são 1 e 3. Mas note que tanto em $x = 1$ como em $x = 3$ a função está redefinida e vale, respectivamente, $f(1) = \sqrt{1}$ e $f(3) = \sqrt{3}$. Para x maior do que 1 a função assume $\sqrt{x}$ que é contínua em todos os pontos (basta notar que o gráfico desta função não apresenta "saltos"). Agora vamos analisar a continuidade em $x = 1$, o ponto onde a função muda de regra e, portanto, o ponto no qual a função pode apresentar salto, para tal, primeiro vamos checar se os limites laterais coincidem:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \sqrt{x} = 1$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x^3 - x)}{x^2 - 4x + 3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{2(x^2 + x + 1)}{(x - 3)} = -3$$

Pois $x^3 - x = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ e $x^2 - 4x + 3 = (x - 1)(x - 3)$.

Como os limites não coincidem, então a função não é contínua em $x = 1$. Portanto, a função é contínua em qualquer x pertencente aos números reais, com exceção de $x = 1$. Mais formalmente $C = \{x \in R \mid x \neq 1\}$. Onde C é o conjunto de valores onde $f(x)$ é contínua.

Exercícios 1.8.1

a) Seja a seguinte função:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{\sqrt{x+5} - \sqrt{10}}, & se\ x \neq 5 \\ \\ L, & se\ x = 5 \end{cases}$$

Determine L para que $f(x)$ seja contínua em $x_0 = 5$.

b-) A força gravitacional exercida pela Terra sobre uma unidade de massa a uma distância r do centro do planeta é:

$$F(r) = \begin{cases} \dfrac{GMr}{R^3} & se\ r < R \\ \\ \dfrac{GM}{r^2}, & se\ r \geq R \end{cases}$$

Onde M é a massa da Terra, R é seu raio e G é a Constante Gravitacional de Newton. F(r) é contínua para todo r?

2 Derivadas

2.1 Introdução

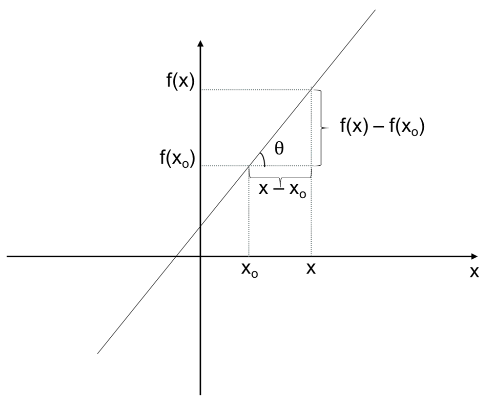
Neste capítulo introduziremos um dos conceitos mais importantes (se não o mais) do cálculo, o conceito de derivada. Derivadas são úteis em inúmeras áreas do conhecimento e tem muitas aplicações práticas, mas nessa apostila nos concentraremos em entender matematicamente o que significa uma derivada e treinaremos o operacional: Calcular derivadas de funções.

2.2 Derivada de uma função

Consideremos a função $f(x) = 2x$ e perguntamos: O quão rápido essa função cresce? Podemos definir uma taxa de variação para essa função e, quanto maior essa taxa de variação, mais rápido a função cresce (a taxa de variação mede o quão rápido a função varia). Uma maneira natural de definir essa taxa de variação é:

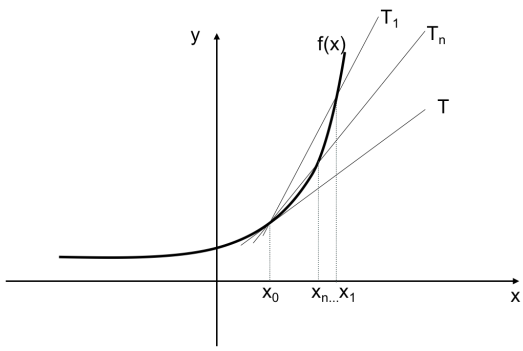
$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x} \tag{18}$$

Onde $\triangle y = f(x) - f(x_0)$ e $\triangle x = x - x_0$ e x_0 é um ponto fixo do domínio. Portanto, a taxa de variação definida em (18) é a variação em $f(x)$ dividido pela variação em x. Isso quer dizer que se variamos x de uma unidade, isto é, $x - x_0 = 1$ e digamos, $f(x)$ varia 10 unidades, ou seja, $f(x) - f(x_0) = 10$, então $m = 10$ e isso nos diz que para cada unidade de variação em x, $f(x)$ varia de 10 unidades. Agora vamos voltar para a função $f(x) = 2x$ e vamos calcular m para ela. Escolhendo $x = 3$ e $x_0 = 1$, então $f(x) = 6$ e $f(x_0) = 2$, portanto, $m = \frac{\triangle y}{\triangle x} = 2$ e para qualquer x e x_0 que escolhermos, m terá o mesmo valor. Este fato significa que esta função cresce à mesma taxa em qualquer região do seu domínio e é assim para qualquer função linear, por isso que o gráfico dessas funções é uma reta. A taxa de variação tem um outro nome em cálculo: Derivada. Vamos agora interpretar geometricamente a taxa de variação (ou derivada):



Vemos pela figura que a taxa de variação que definimos é também a tangente do ângulo θ que a reta faz com o eixo x, ou seja, $tan(\theta) = \frac{\triangle y}{\triangle x}$. Esta é a interpretação geométrica de derivada que nos será muito útil. Pronto, você já sabe o que é uma derivada: **É simplesmente a taxa de variação de uma função** como acabamos de calcular. E a derivada da função $f(x) = 2x$ é simplesmente 2. Isso significa que a função $2x$ varia 2 unidades para cada unidade de variação em x, ou seja, o que variarmos em x, $f(x)$ variará o dobro. O problema é que nem todas as funções são lineares e tem uma taxa de variação constante como a função linear e, para essas funções, teremos que definir a taxa de variação, ou derivada, de uma maneira um pouco melhor e usando a ideia de limite.

Consideremos agora a função $f(x) = x^2$, vamos calcular a sua taxa de variação em duas regiões diferentes, primeiro escolhendo $x = 2$ e $x_0 = 1$ e depois escolhendo $x = 4$ e $x_0 = 3$. Na primeira região $m = \frac{4-1}{1} = 3$ e na segunda região $m = \frac{16-9}{1} = 7$. A taxa de variação dessa função não é constante! Agora temos uma dificuldade em calcular a taxa de variação dessa função, pois ela varia ponto a ponto. Precisamos definir, portanto, uma taxa de variação instantânea em um ponto escolhido. Agora não perguntamos mais qual é a taxa de variação da função x^2, mas sim qual é a taxa de variação da função x^2 no ponto $x_0 = 2$, por exemplo. Vamos fazer isso da seguinte maneira:



Na figura, vemos que podemos pegar valores de x cada vez mais próximos de x_0 para calcular a taxa de variação, x_1, x_2, ..., x_n e a taxa de variação será, como já percebemos, a tangente do ângulo θ entre a reta que liga esses dois pontos e o eixo x. Conforme aproximamos x de x_0 ($\lim_{x\to x_0}$) essa reta começa a se aproximar de T, a reta tangente ao gráfico de $f(x)$ no ponto x_0. Se pegarmos um valor de x muito, mas muito próximo de x_0 e fizermos um "zoom"naquela região, veremos que a reta que liga x, um ponto infinitamente próximo de x_0, a x_0, é praticamente a reta tangente no ponto x_0. Assim, entendemos que **a taxa de variação instantânea, ou derivada, no ponto x_0 é a tangente do ângulo θ entre a reta tangente no ponto x_0 e o eixo x, ou seja, o coeficiente angular da reta tangente**. Matematicamente a definição de derivada fica:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{19}$$

Onde usamos a notação $f'(x_0)$ para denotar a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0, que é a taxa de variação calculada no limite em que x está muito próximo de x_0. Seu professor pode definir a derivada de uma maneira alternativa fazendo a substituição de variáveis $h = x - x_0$ e então a definição fica:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{20}$$

Em resumo: A derivada no ponto x_0 é o coeficiente angular da reta tangente ao gráfico no ponto x_0 e a calculamos utilizando os limites (19) ou (20).

2.3 Calculando derivadas via definição

Para calcular derivadas basta calcularmos um limite, mas esse limite nem sempre será simples e por isso existem outras técnicas para calcular derivadas sem precisar de fato calcular um limite. Mas por enquanto vamos calcular algumas derivadas utilizando somente a definição que temos.

EXEMPLO 2.3.1 Calcule a derivada de $f(x) = x^2$. no ponto x_0

Solução: Utilizando a definição:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = 2x_0$$

Se escolhermos um valor de x_0 então saberemos qual é a taxa de variação de x^2 exatamente nesse ponto x_0. Note que essa derivada não é constante para essa função, pois depende do x_0 que escolhermos.

EXEMPLO 2.3.2 Calcule a derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ no ponto $x_0 = 2$

Solução:

$$f'(2) = \lim_{x \to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} =$$

$$= \lim_{x \to 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{(\sqrt{x} - \sqrt{2})(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \to 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Exercícios 2.3.1

Calcule as derivadas das funções abaixo **via definição**:

a) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ no ponto $x_0 = 2$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}$ no ponto $x_0 = 2$

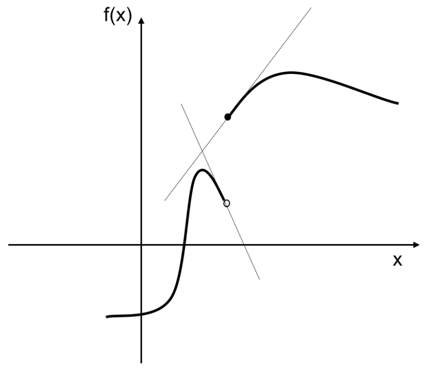
c) $f(x) = \frac{1}{x^n}$ no ponto x_0

d) (Desafio) $f(x) = ln(x)$ no ponto x_0

f) (Desafio) $f(x) = e^x$ no ponto x_0

2.4 Existência da derivada - Derivabilidade

Podemos querer saber se uma função é derivável (diferenciável) em um certo ponto de seu domínio. Primeiro lembramos que a derivada é um limite e, portanto, se uma função apresenta um salto, ou seja, uma descontinuidade em algum ponto, então é claro que a função não será derivável nesse ponto. Um desenho pode tornar isso claro: A reta tangente em um ponto de descontinuidade não está definida.



Outro caso em que a derivada de uma função não existe, mesmo esta sendo contínua, é em um ponto de quina, ou seja, onde a função faz uma espécie de "bico". Formalmente, o critério para uma função ser derivável em um ponto x_0 é simples:

1)Deve ser contínua em x_0.
2)O limite $f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ deve existir.

É importante notar que **para que a função seja derivável em um ponto, necessariamente ela precisa ser contínua nesse ponto, mas se a função é contínua em um certo ponto, não necessariamente ela é derivável nesse ponto.**

Diferenciabilidade $\Rightarrow$ Contiuidade

EXEMPLO 2.4.1 A função$f(x) = |x|$ é derivável em $x_0 = 0$?

Solução: Primeiro verificamos se a função é contínua em $x_0 = 0$:

$$f(x_0) = f(0) = |0| = 0$$

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0$$
$$\lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-} -x = 0$$

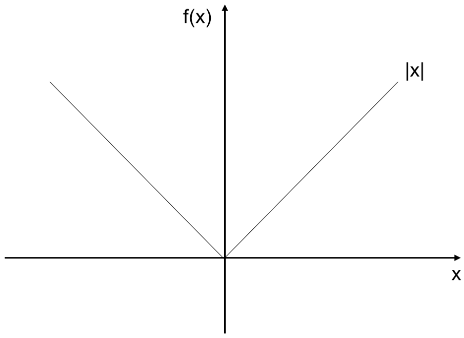
Portanto a função é contínua em $x_0 = 0$.

Agora precisamos determinar se o limite (19) existe, para verificar se a função é diferenciável em $x_0 = 0$:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1$$

Como os limites não coincidem então $f'(0)$ não existe, apesar de ser contínua em $x_0 = 0$. Graficamente é fácil ver porque isso acontece: A função módulo apresenta um "bico"em $x_0 = 0$ e nesse ponto a reta tangente não está definida.



Exercícios 2.4.1

a)

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & se\ x < 2 \\ 1, & se\ x \geq 2 \end{cases}$$

f é contínua em 2? f é diferenciável em 2? Justifique.

b)

$$f(x) = \begin{cases} -x+3, & se\ x < 3 \\ x-3, & se\ x \geq 3 \end{cases}$$

f é contínua em 3? f é diferenciável em 3? Justifique

c) Determine a função f'(x), derivada da função abaixo. Em seguida, represente os gráficos de f(x) e f'(x) no mesmo sistema de eixos.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & se\ x \geq 4 \\ x-2, & se\ x < 4 \end{cases}$$

d) Uma função contínua é sempre diferenciável? Se sim, prove. Se não, de um contra-exemplo.

2.5 Regras de derivação

Não precisamos calcular uma derivada via definição, existem regras e técnicas que nos poupam desse trabalho.

Teorema Se $n \neq 0$ é um inteiro, então são válidas as seguintes fórmulas de derivação:

$$\text{a)} f(x) = x^n \longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}.$$

$$\text{b)} f(x) = x^{\frac{1}{n}} \longrightarrow f'(x) = \tfrac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$$

Aceitaremos esta regra, conhecida como "regra do tombo", sem demonstração.

EXEMPLO 2.5.1 Calcule a derivada da função $f(x) = 2x^3 + 4x^{-2} + \sqrt{x}$

Solução: Para calcular essa derivada usaremos o fato de que a derivada da soma é a soma das derivadas e calcularemos a derivada de cada parcela individualmente utilizando a regra do tombo:

$$f'(x) = 3 \times 2x^2 - 2 \times 4x^{-3} + \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = 6x^2 - \frac{8}{x^3} + \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2.6 Derivadas de e^x e lnx

Teorema São válidas as seguinte fórmulas de derivação

$$a) f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$$
$$\text{b)} g(x) = lnx \longrightarrow g'(x) = \tfrac{1}{x},\ x \text{ maior que } 0$$

Aceitaremos essas fórmulas sem demonstração.

2.7 Derivadas de funções trigonométricas

Teorema São válidas as fórmulas de derivação:

$$\text{a)} sen'x = cosx.$$
$$\text{b)} cos'x = -senx.$$
$$\text{c)} tg'x = sec^2x$$
$$\text{d)} sec'x = secxtgx$$

2.8 Regras de derivação: Soma, multiplicação por constante, regra do produto e regra do quociente.

Teorema Sejam f e g deriváveis em p e seja k uma constante. Então são válidas as seguintes regras de derivação:

$$(\text{R1})(f(p)+g(p))' = f'(p)+g'(p) \text{ (A derivada da soma é a soma das derivadas)}$$

$$(\text{R2})(kf(p))' = kf'(p). \text{ (k é constante)}$$

$$(\text{R3})(f(p).g(p))' = f'(p)g(p)+f(p)g'(p) \quad \text{(Regra do produto)}$$

$$(\text{R4})(\tfrac{f(p)}{g(p)})' = \tfrac{f'(p)g(p)-f(p)g'(p)}{g(p)^2} \quad \text{(Regra do Quociente)}$$

EXEMPLO 2.8.1 Calcule a derivada da função $f(x) = xe^x$.

Esta pode ser encarada como a multiplicação de duas funções, $h(x) = x$ e $g(x) = e^x$. Assim, podemos aplicar a regra do produto (R3):

$$f'(x) = h'(x)g(x) + h(x)g'(x)$$

Pela regra do tombo $h'(x) = 1$ e pela regra de derivação da exponencial $g'(x) = e^x$. Portanto:

$$f'(x) = 1e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

EXEMPLO 2.8.2 Calcule a derivada da função $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Chamando $h(x) = x^2$ e $g(x) = x^2+1$ e utilizando a regra do quociente (R4):

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-2x^3}{(x^2+1)^2} = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$$

Exercícios 2.8.1

Calcule as seguintes derivadas:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x+1}$

b) $f(x) = sen(x)e^x$

c)$f(x) = \frac{x-1}{x^2}$

d) $f(x) = \frac{cosxln(x)}{x^2}$

2.9 Uma outra notação para a derivada: A notação de Leibniz ($\frac{dy}{dx}$)

Quando introduzimos o conceito de derivada dissemos que a derivada é nada mais nada menos do que a taxa de variação instantânea da função em um certo ponto. Lembrando que a taxa de variação é definida como:

$$m = \frac{\triangle y}{\triangle x}$$

Então a derivada é a própria taxa de variação quando $\triangle x \to 0$:

$$f'(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x_0 + \triangle x) - f(x_0)}{\triangle x}$$

Podemos pensar em uma outra forma de denotar a derivada inventando uma notação para o quociente $\frac{\triangle y}{\triangle x}$ quando $\triangle x \to 0$:

$$\lim_{x \to x_0} \triangle x = dx$$

Lembrando que $\triangle x = x - x_0$. E também:

$$\lim_{x \to x_0} \triangle y = dy$$

Deste modo temos uma outra notação para a derivada:

$$f'(x) = \lim_{\triangle x \to 0} \frac{\triangle y}{\triangle x} = \frac{dy}{dx}$$

Deste ponto em diante usaremos ambas as notações $f'(x)$ e $\frac{dy}{dx}$ para indicar a derivada de $f(x)$.

2.10 Regra da cadeia para a derivação de função composta

Nosso objetivo nesta seção é aprender a derivar funções compostas do tipo $f(g(x))$. Antes, vamos aprender a identificar uma função composta. Para isso, faremos alguns exemplos.

EXEMPLO 2.10.1 A função $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ é uma função composta, pois, se chamarmos $g(x) = x^2 - 1$, então podemos escrever $f(g(x)) = \sqrt{g(x)}$. Assim, $g(x)$ se torna uma nova variável e podemos tratá-la como tratávamos a variável x. Deste modo, se desejarmos derivar f com relação a nova variável g (Atenção: não estamos calculando a derivada com relação à x, mas sim com relação à g):

$$f'(g) = \frac{1}{2}g^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}g^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{g}}$$

EXEMPLO 2.10.2 A função $e^{-\frac{1}{x}}$ é uma função composta, pois, se chamarmos $g(x) = -\frac{1}{x}$, então, $f(g(x)) = e^{g(x)}$ e se quisermos derivar a função f com relação a nova variável g:

$$f'(g) = e^g$$

De acordo com a regra de derivação para a exponencial.

EXEMPLO 2.10.3 A função $ln(\frac{x^2}{x^2+1})$ é uma função composta, pois, se chamarmos $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$, então, $f(g(x)) = ln(g(x))$ e se quisermos derivar f com relação a nova variável g:

$$f'(g) = \frac{1}{g}$$

De acordo com a regra de derivação para o ln.

Agora que adquirimos um "olhar"para identificar uma função composta, vamos aprender a deriva-las com relação a x.

Regra da cadeia Seja $f(x)$ e $g(x)$ duas funções deriváveis. Seja a composta $h(x) = f(g(x))$, então vale a seguinte regra de derivação para $h(x)$:

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x) \tag{21}$$

Ou seja, a derivada da função composta é a multiplicação da derivada de f com relação à g ($f'(g)$), como calculamos nos exemplos anteriores, multiplicado pela derivada da função g ($g'(x)$) com relação a x. Deste modo, para calcular a derivada de uma função composta, seguiremos 3 passos:

$$\text{1) Calcular } f'(g)$$

$$\text{2) Calcular } g'(x)$$

$$\text{3) Multiplicar } f'(g)g'(x)$$

EXEMPLO 2.10.4 Derive a função $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ com **relação a** x.

Solução: Para derivar essa função utilizaremos a regra da cadeia. Chamando $f(x) = \sqrt{x}$ e $g(x) = x^2 - 1$, então $f(g(x)) = \sqrt{x^2 - 1}$. $g'(x) = 2x$ e $f'(g) = \frac{1}{2\sqrt{g}}$ de acordo com o exemplo 2.10.1. Utilizando a formula (21):

$$h(x) = f'(g(x))g'(x) = f'(g)g' = \frac{1}{2\sqrt{g}}2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

EXEMPLO 2.10.5 Derive a função $h(x) = ln(\frac{x^2}{x^2+1})$ com **relação a** x.

Solução: Utilizando o mesmo método do exemplo anterior, $f(x) = ln(x)$, $g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$ e $f(g(x)) = ln(\frac{x^2}{x^2+1})$

$$f'(g) = \frac{1}{g}$$

$$g'(x) = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$h'(x) = f'(g)g' = \frac{1}{g}\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2}{x(x^2 + 1)}$$

EXEMPLO 2.10.6 Derive a função $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ com **relação a x**.

Solução: Agora vamos utilizar a notação de Leibniz para a derivada. Chamando $f(g) = e^g$ e $g(x) = -\frac{1}{x}$. A derivada que desejamos calcular é:

$$f'(x) = \frac{df}{dx}$$

Mas podemos reescrever essa derivada como:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx}$$

$$\frac{df}{dg} = e^g$$

$$\frac{dg}{dx} = \frac{1}{x^2}$$

Portanto:

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\frac{dg}{dx} = e^g\frac{1}{x^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

EXEMPLO 2.10.7 Derive a função $f(x) = 2^x$ com **relação a x**.

Solução: Note que neste caso a variável x está no expoente. Desta forma, **não podemos fazer a regra do tombo**. Na verdade, temos que utilizar a regra da cadeia. O primeiro passo é passar "ln"dos dois lados da função para tirar o x do expoente.

$$ln(f(x)) = ln(2^x)$$
$$ln(f(x)) = xln2$$

Agora basta derivar os dois lados da equação, lembrando que $ln2$ é uma constante e que para derivar $ln(f(x))$ temos que usar a regra da cadeia. Por fim, devemos isolar f'(x) que é o resultado que queremos.

$$\frac{1}{f(x)}f'(x) = ln2$$
$$f'(x) = ln2.f(x)$$
$$f'(x) = ln2.2^x$$

Exercícios 2.10.1

Calcule as seguintes derivadas utilizando a regra da cadeia:

a) $f(x) = e^{cos(x)}$

b) $ln(\frac{x^3}{x^2+1})$ Aqui você tem que utilizar a regra do quociente também.

c) $f(x) = sen(x)e^{cos(x)}$ Aqui você tem que utilizar a regra do produto também.

d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$ Aqui você tem que utilizar a regra do quociente também.

e) $f(x) = \frac{cos(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ Aqui você tem que utilizar a regra do quociente também.

f) $f(x) = x^{x^2}$ Aqui você tem que utilizar o truque do exemplo 2.10.7 para tirar o x do expoente.

g) $f(x) = (e^x + 3x)^{\frac{1}{x}}$ Aqui você tem que utilizar o truque do exemplo 2.10.7 para tirar o x do expoente.

2.11 Derivada implícita

Em uma função temos uma variável independente e uma variável dependente. Por exemplo, na função $y = 2x + 1$, temos x como variável independente e y "isolado"como variável dependente, portanto, a variável dependente sempre está sozinha no lado esquerdo da igualdade. Agora consideremos a equação $x^2 + y^2 = 1$, a equação de um círculo de raio 1. Nesta igualdade, não temos uma variável como função da outra, isto é, não temos uma das variáveis isolada de um lado da igualdade. Entretanto, sabemos que esta igualdade também pode ser uma função se isolarmos y:

$$y = \pm\sqrt{1 - x^2} \tag{22}$$

Portanto, a equação do círculo nos fornece duas funções, uma para cada sinal. Dizemos que essas funções são dadas de maneira implícita pela equação do círculo

Como a equação do círculo esconde uma função implícita $y(x)$, se quisermos saber a derivada de $y(x)$ com respeito a x, devemos fazer uma **derivada implícita**, que significa derivar a equação do círculo de ambos os lados com respeito a x e, após feito isso, isolar a derivada. A derivação implícita tem como finalidade encontrar $y'(x)$(ou $\frac{dy}{dx}$) tendo em mãos uma equação que esconde uma função implícita. Este processo pode ficar mais claro com os exemplos a seguir.

EXEMPLO 2.11.1 Derive implicitamente a equação $x^2 + y^2 = 1$.
e encontre $\frac{dy}{dx}$

Solução: Como dissemos anteriormente, para encontrarmos $\frac{dy}{dx}$, vamos derivar ambos os lados da equação e tratar y como sendo uma função de x:

$$\frac{d(x^2 + y^2)}{dx} = \frac{d1}{dx} = 0 =$$

Pois a derivada de uma constante é zero.

$$= \frac{dy^2}{dx} + \frac{dx^2}{dx} = 0 \tag{23}$$

Agora basta ter em mente que $y = f(x)$ é uma função de x e a princípio não conhecemos essa função, como essa função está ao quadrado, teremos que usar a regra da cadeia para derivá-la:

$$\frac{dy^2}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}$$

Já x^2 é uma função explícita de x e podemos deriva-la normalmente:

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x$$

Portanto, a equação (23) fica:

$$2y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$$

Agora basta isolar o que queremos encontrar:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

E assim temos uma expressão para derivada $\frac{dy}{dx}$.

EXEMPLO 2.11.2 Calcule $\frac{dy}{dx}$ derivando implicitamente a equação $y^x + x = y^2$.

Para derivar a parcela y^x vamos usar a regra para derivar funções do tipo $f(x)^g(x)$:

$$[f(x)^{g(x)}]' = e^{g(x)ln(f(x))}(g(x)ln(f(x)))'$$

Como neste caso $f(x) = y$ e $g(x) = x$

$$(y^x)' = e^{xlny}(lny + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}) = y^x(lny + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx})$$

Assim, derivando a equação do enunciado de ambos os lados:

$$\frac{d(y^x + x)}{dx} = \frac{d(y^2)}{dx} =$$

$$= \frac{d(y^x)}{dx} + \frac{dx}{dx} = \frac{d(y^2)}{dx} =$$

$$= y^x(lny + \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}) + 1 = 2y\frac{dy}{dx}$$

Agora basta isolarmos $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1 - y^x lny}{2y - y^{x-1}x}$$

Exercícios 2.11.1

Encontre $\frac{dy}{dx}$ derivando implicitamente:

a) $xy^2 + 2y = 3$

b) $xe^y + xy = 3$

c) $5y + cosy = xy$

d) $y + ln(x^2 + y^2) = 4$

Exercícios 2.11.2

1) Suponha que $y = f(x)$ seja uma função derivável dada implicitamente pela equação $y^3 + 2xy^2 + x = 4$. Suponha, ainda, que $1 \in D_f$.

a) Calcule $f(1)$.

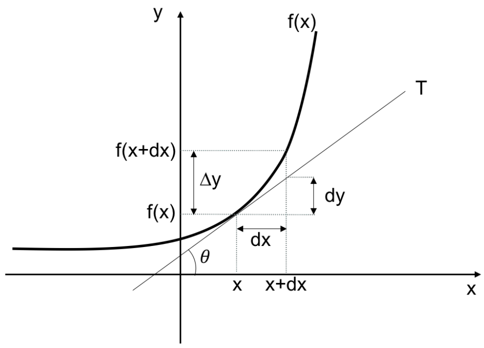
b) Determine a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abscissa 1.

2) A função $y = f(x)$ é dada implicitamente pela equação $3y^2 + 2xy - x^2 = 3$. Sabe-se que, para todo $x \in D_f$, $f(x) > 0$ e que f admite um reta tangente T paralela à reta $5y - x = 2$. Determine T.

3) Considere uma hipérbole do tipo: $\alpha x^2 - \beta(y - \gamma)^2 = \theta$. Considerando α, β, γ e θ, parâmetros constantes, encontre $y'(x)$ através de derivação implícita.

2.12 Diferencial

Agora daremos uma interpretação para a notação $\frac{dy}{dx}$. Se você não leu ou não lembra da seção 2.9, recomendamos que leia. Dissemos que $\frac{dy}{dx} = f'(x)$, onde, dy e dx são notações usadas para os acréscimos $\triangle y$ e $\triangle x$ quando $\triangle x \to 0$, ou seja, dx e dy são versões infinitesimais de $\triangle y$ e $\triangle x$. Quando introduzimos o conceito de derivada, dissemos que a derivada é simplesmente a taxa de variação da função calculada no ponto e, quando calculamos a taxa de variação dessa maneira, ela se torna o coeficiente angular da reta tangente neste ponto. Para calcular o coeficiente angular de uma reta, calculamos a tangente do ângulo que esta reta faz com o eixo x, como na figura. Portanto, podemos encarar dy e dx como o cateto oposto e adjacente usados para calcular a tangente do angulo que a reta tangente faz com o eixo x.



Já que estamos tratando $\frac{dy}{dx}$ como um quociente entre dois números pequenos, então:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} \Rightarrow dy = f'(x)dx$$

E assim, temos uma maneira de calcular o acréscimo infinitesimal dy que a função sofre. Esse acréscimo infinitesimal não é igual ao acréscimo real $\triangle y$ que a função sofre:

$$\triangle y = f(x + dx) - f(x)$$

Como vemos na figura, existe uma diferença entre $\triangle y$ e dy. Assim, dy pode ser encarado como uma aproximação para $\triangle y$ quando x passa para $x + dx$. Observe pela figura que, quanto menor dx, menor será a diferença entre $\triangle y$ e dy. O acréscimo infinitesimal $dy = f'(x)dx$ chama-se diferencial de $y = f(x)$.

EXEMPLO 2.12.1 Calcule o diferencial dy de $y = x^2$ e o relacione com $\triangle y$.

Solução: Sabemos que $dy = f'(x)dx$ e que $\triangle y = f(x + dx) - f(x)$.

$$f'(x) = 2x$$

Portanto,

$$dy = 2xdx$$

Mas,

$$\triangle y = f(x+dx) - f(x) = (x+dx)^2 - x^2 = 2xdx + (dx)^2$$

E então,

$$\triangle y - dy = (dx)^2$$

É a diferença entra o acréscimo $\triangle y$ e a versão infinitesimal dy.

EXEMPLO 2.12.2 Utilizando a diferencial, calcule um valor aproximado para$\sqrt{1,01}$. Avalie o erro.

Solução: Consideremos a função $y =\sqrt{x}$, queremos saber um valor aproximado para $\sqrt{1,01}$. Podemos pensar em encontrar o acréscimo infinitesimal dy e encontraremos um valor aproximado para$\sqrt{1,01}$ somando $1+dy$, pois$\sqrt{1} = 1$ e dy é o quanto variou $y =\sqrt{x}$ infinitesimalmente

$$dy = f'(x)dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

Em $x = 1$,

$$dy = \frac{1}{2}dx$$

Pois dx=0,01(a figura ajuda a entender por que).
Portanto $dy = \frac{0,01}{2} = 0,005$ e $1 + dy = 1,005$ é um valor aproximado para$\sqrt{1,01}$.

Exercícios 2.12.1

a) Seja $y = x^2 + 3x$. Calcule o diferencial e o erro que se comete na aproximação de $\triangle y$ por dy. Interprete graficamente.

b) Seja $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, $r > 0$. Calcule o diferencial e interprete geometricamente dV.(Lembre-se que V é o volume da esfera de raio r e que $4\pi r^2$ é a área da superfície esférica de raio r.)

2.13 Regras de L'Hospital

As regras de L'Hospital nos permitem calcular limites que apresentam indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\infty}{\infty}$.

1ª Regra de L'Hospital. Sejam f e g deriváveis e $g(x) \neq 0$ para $x \neq p$. Então, se

$$\lim_{x\to p} f(x) = 0, \ \lim_{x\to p} g(x) = 0$$

e se $\lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, então $\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)}$ existirá e

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

2ª Regra de L'Hospital Sejam f e g deriváveis em $x \neq p$, com $g'(x) \neq 0$ em $x \neq p$. Então, se

$$\lim_{x\to p^{\pm}} f(x) = \pm\infty, \ \lim_{x\to p^{\pm}} g(x) = \pm\infty$$

e se $\lim_{x\to p^{\pm}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ existir, então

$$\lim_{x\to p^{\pm}} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to p^{\pm}} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

EXEMPLO 2.13.1 Calcule $\lim_{x\to 0^+} xlnx$.

Solução: Vamos primeiro colocar a função $xlnx$ como uma indeterminação:

$$xlnx = \frac{lnx}{\frac{1}{x}} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = -\frac{\infty}{\infty}$$

E agora aplicamos a primeira regra de L'Hospital

$$\lim_{x\to 0^+} -\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} -x = 0$$

Exercícios 2.13.1

Calcule os seguintes limites utilizando as regras de L'Hospital:

a) $\lim_{x\to 0^+} x^2 e^{\frac{1}{x}}$

b)$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} - \frac{1}{senx}$

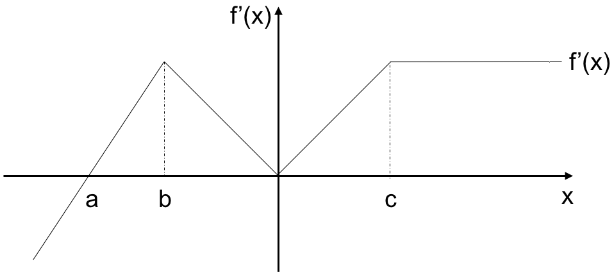
c) $\lim_{x\to 0^+} x^x$

d) $\lim_{x\to +\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$

e) $\lim_{x\to 0^+} senxlnx$

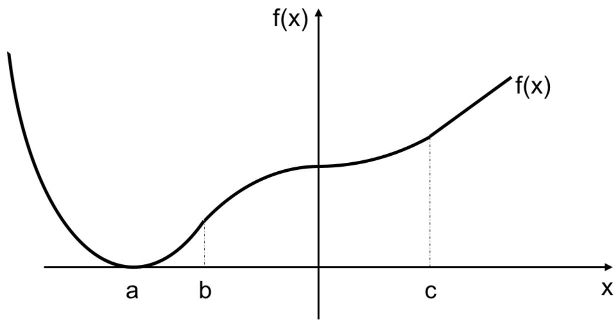
2.14 Esboço do gráfico de $f(x)$ a partir do gráfico de $f'(x)$

Suponha que temos o gráfico da derivada de uma função e queremos fazer um esboço do gráfico da função. Podemos utilizar o gráfico da derivada para fazer esse esboço.



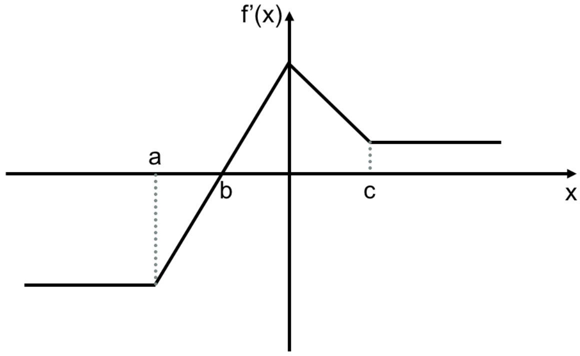
No intervalo $]-\infty, a]$, $f'(x){<}0$ e portanto a função está decrescendo. Como $f'(x)$ cresce como uma reta, i.é, $f'(x) = \alpha x$ para $x < a$, então, $f(x) = \alpha\frac{x^2}{2}$, ou seja, decresce como uma parábola. Como $f'(x) > 0$ para $x \in\,]a, b]$ e também cresce como uma reta, então $f(x)$ passa a crescer como uma parábola e $x = a$ é um ponto de mínimo da função.

Em $x = b$ há uma mudança no gráfico da derivada: Ela passa a decrescer. O que isso significa? Significa que a medida que x cresce no intervalo $]b, 0[$, a derivada da função vai diminuindo, ou seja, a taxa de variação vai ficando cada vez menor e como consequência a concavidade no intervalo $]b, 0[$ é voltada para baixo. Em $x = 0$ a derivada se anula novamente, mas dessa vez $f'(x) > 0$ antes e depois de $x = 0$, o que significa que $x = 0$ não é um ponto de mínimo e nem de máximo, mas sim um ponto de inflexão (um ponto de mudança de concavidade). Assim, para $x \in\,]0, c[$, a derivada cresce como uma reta e é positiva, o que significa que a função cresce como uma parábola. Em $x \in\,]c, +\infty[$ a derivada da função é uma constante positiva, portanto a função cresce como uma reta.



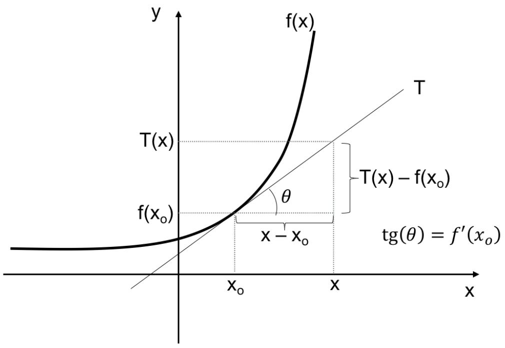
Exercícios 2.14.1

a) Esboe o gráfico de $f(x)$ a partir do gráfico de $f'(x)$:



3 Problemas envolvendo reta tangente e normal a um gráfico

Seja um ponto x_0. Para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de uma função no ponto x_0, basta lembrarmos que a derivada no ponto x_0 é o coeficiente angular da reta tangente neste ponto, ou seja:



$$m = f'(x_0) = \frac{t(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\Leftrightarrow t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{24}$$

(24) é a equação da reta tangente $t(x)$ ao gráfico da $f(x)$ no ponto x_0. Para encontrarmos a equação da reta normal ao gráfico, basta lembrarmos que o seu coeficiente angular guarda a seguinte relação com o coeficiente angular da reta tangente:

$$m_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Portanto, a equação da reta normal é:

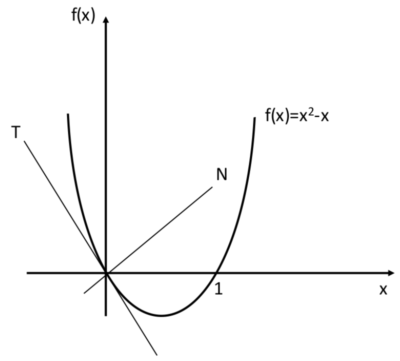
$$n(x) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0) \tag{25}$$

EXEMPLO 3.1 Seja $f(x) = x^2 - x$. Determine as equações das retas tangente e normal ao ponto de abscissa 0.

Solução: Sabemos que $f(0) = 0$, portanto, ambas as retas, normal e tangente, passam pela origem, isso significa que o coeficiente linear de ambas é nulo. Deste modo, ambas as retas são da forma:

$$t(x) = ax$$
$$n(x) = bx$$

Sabemos também que o coeficiente angular da reta tangente no ponto $x_0 = 0$ é a derivada de $f(x)$ neste ponto e, portanto:



$$a = f'(x_0 = 0) = -1$$

e $b = -\frac{1}{f(x_0=0)} = 1$. Portanto, as equações das retas tangente e normal são:

$$t(x) = -x$$
$$n(x) = x$$

Poderíamos também usar diretamente (24) e (25):

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = -1(x - 0) + 0 = -x$$

$$n(x) = 1(x - 0) + 0 = x$$

EXEMPLO 3.2 r é uma reta que passa por (1,-1) e é tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 - x$. Determine r.

Solução: Neste problema não sabemos qual é o ponto de tangência, isto é, não sabemos quem é x_0. Mas sabemos que a reta r passa pelo ponto (1,-1) e, portanto:

$$t(1) = -1 = (3x_0^2 - 1)(1 - x_0) + f(x_0)$$

Pois, $f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$. Assim, temos uma equação do terceiro grau para x_0:

$$-1 = 3x_0^2 - 3x_0^3 - 1 + x_0 + x_0^3 - x_0$$

Onde substituímos $f(x_0) = x_0^3 - x_0$. Arrumando a equação:

$$0 = 3x_0^2 - 2x_0^3 = x_0^2(3 - 2x_0)$$

As soluções são:

$$x_0 = 0 \ ou \ x_0 = \frac{3}{2}$$

E isso significa que existem dois pontos de tangência, um em $x_0 = 0$ e outro em $x_0 = \frac{3}{2}$. Deste modo, existem duas retas tangentes ao gráfico de $f(x) = x^3 - x$ que são:

$$t_1(x) = f'(0)(x - 0) + f(0) = -x$$

e

$$t_2(x) = f'(\frac{3}{2})(x - \frac{3}{2}) + f(\frac{3}{2}) = \frac{23}{4}(x - \frac{3}{2}) + \frac{15}{8}$$

EXEMPLO 3.3 Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 + 3x$ e paralela à reta $g(x) = 2x + 3$.

Se a reta tangente ao gráfico da $f(x)$ é paralela à reta $g(x)$, então seu coeficiente angular é $f'(x_0) = 2$.

$$f'(x_0) = 2x_0^2 + 3 = 2 \ \Rightarrow \ x_0 = -\frac{1}{2}$$

A equação da reta paralela será, portanto:

$$t(x) = f'(-\frac{1}{2})(x + \frac{1}{2}) + f(-\frac{1}{2}) \ \Rightarrow \ y(x) = 2x - \frac{1}{4}$$

Exercícios 3.1

a) Determine a equação da reta tangente da função $f(x) = x^3 - 1$ no ponto $x_0 = 1$.

b) Seja $f(x) = x^2$. Determine a equação da reta que é tangente ao gráfico de f e paralela à reta $y = \frac{1}{2}x + 3$.

c) Considere a função $f(x) = x^3 + g(x)^2$. Sabe-se que $g(1) = 2$ e $g'(1) = 3$. Determine a equação da reta tangente à curva de $f(x)$ no ponto $x_0 = 1$.

d) A reta s passa pelo ponto $(3, 0)$ e é normal ao gráfico de $f(x) = x^2$ no ponto (a, b). Determine (a, b) e a equação de s.

e) Determine a reta tangente ao gráfico de $f(x) = x^3 + 3x$ e paralela à reta $y = 6x - 1$.

f) Determine a equação da reta que é perpendicular à reta $2y + x = 3$ e tangente ao gráfico de $f(x) = x^2 - 3x$.

g) Determine a equação da reta tangente à função $f(x) = x^{x^2}$ no ponto $x_0 = 1$.

h) Mostre que o triângulo formado pelos eixos ordenados e a reta tangente à curva $f(x) = \frac{1}{x}$ com x>0, tem área igual a 2.

4 Estudo completo de funções e esboço de gráficos

Neste capítulo faremos o uso da derivada para estudar como uma função varia ao longo de seu domínio. Assim, seremos capazes esboçar gráficos.

O estudo completo, necessário para esboçarmos gráficos de funções, envolve seis passos:

1) Domínio.
2) Interceptos.
3) Crescimento, decrescimento e pontos críticos.
4) Concavidade e pontos de inflexão.
5) Limites e assíntotas.
6) Desenho do gráfico.

4.1 Domínio

Antes de descobrirmos qualquer informação sobre a função é muito importante sabermos qual é o domínio desta função. O domínio de uma função é conjunto de todos os valores reais que x pode assumir. Alguns domínios importantes que temos que saber são:

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, o domínio é $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$
Se $f(x) = e^x$, o domínio é $D_f = \ x \in \mathbb{R}$
Se $f(x) = \sqrt{x}$, o domínio é $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$
Se $f(x) = ln(x)$, o domínio é $D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$

ATENÇÃO: O domínio da função pode ser modificado caso haja um contexto no exercício. Se, por exemplo, x representa a quantidade de algo ou o preço de algo, então x não poderá assumir valores negativos.

EXEMPLO 4.1.1 Qual é o domínio da função $x^3 + 3x^2 - 1$?

Esta função é um polinômio e, portanto, x pode assumir qualquer valor pertencente ao conjunto dos números reais. De maneira geral, sempre que tivermos uma função polinomial, essa função terá como domínio o conjunto dos números reais. Em linguagem matemática:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R}\ \}$$

EXEMPLO 4.1.2 Qual é o domínio da função $\frac{x}{x^2-4}$?

Neste caso, temos um polinômio no denominador e, portanto, teremos que tomar cuidado na hora de determinar o domínio, pois, o denominador nunca poderá ser 0. Na função acima, o denominador só será 0 se $x = \pm 2$. Portanto, o domínio dessa função é qualquer valor real que não seja $x = \pm 2$. Em linguagem matemática:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \pm 2\}$$

EXEMPLO 4.1.3 Qual é o domínio da função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}$?

Neste caso, além de termos que tomar cuidado para que o denominador não se anule, também temos que tomar cuidado para que não haja raiz quadrada com um número negativo. Lembramos que não existe raiz quadrada de números negativos, portanto, o que está dentro da raiz só pode assumir valores positivos. Deste modo, $x^2 - 4$ só pode ser positivo, ou em linguagem matemática, $x^4 - 4 > 0$. Temos que pensar, portanto, em quais valores de x, $x^2 - 4$ será menor ou igual a zero e excluir esses valores do domínio. Obviamente só será zero se $x = \pm 2$. Se x assumir um valor menor do que 2 ou menos negativo do que -2, ou seja $-2 < x < 2$, também teremos problemas, por exemplo, se $x = \pm 1$ teremos 1-4=-3. Então, os valores que x pode assumir só podem ser maiores do que 2 e menores do que -2, em notação matemática:

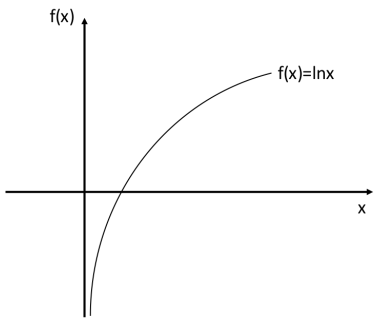
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 2 \; ou \; x < -2\}$$

Uma outra forma de expressar que $x > 2$ ou $x < -2$ é dizer que x em módulo é maior do que 2, ou $|x| > 2$:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$$

EXEMPLO 4.1.4 Qual é o domínio da função $f(x) = ln(x)$?

Pelo gráfico, vemos que $x > 0$:



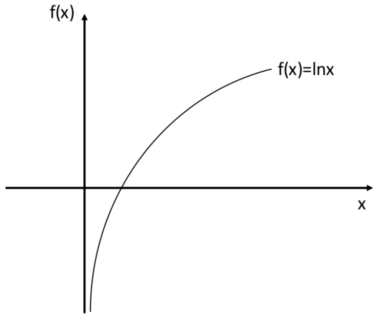
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

4.2 Interceptos

Os interceptos são os pontos em que a função cruza os eixos ordenados. A função cruza o eixo y quando $x = 0$ e cruza o eixo x, quando $f(x) = 0$. É fácil entender isso notando que em qualquer ponto do eixo y, $x = 0$ e, em qualquer ponto do eixo x, $f(x) = 0$.

EXEMPLO 4.2.1 Encontre os interceptos da função $f(x) = ln(x)$.

Para construir gráficos, é muito importante termos alguns gráficos "clássicos"em mente e um deles é o de $ln(x)$.



Pelo gráfico, vemos que a função nunca toca o eixo y e, portanto, não possuí intercepto em y. Entretanto, a função cruza o eixo x em $x = 1$, pois, $f(1) = 0$. Assim, o intercepto é (1,0).

EXEMPLO 4.2.2 Encontre os interceptos da função $f(x) = \frac{x^2-x}{1+3x^2}$.

Para encontrarmos o intercepto em y basta fazermos $x = 0$, como $f(0) = 0$, então o intercepto em y é o ponto $(x, y) = (0, 0)$. Para encontrarmos o intercepto em x, basta fazermos $y = 0$ e resolvermos a equação $0 = \frac{x^2-x}{1+3x^2}$.

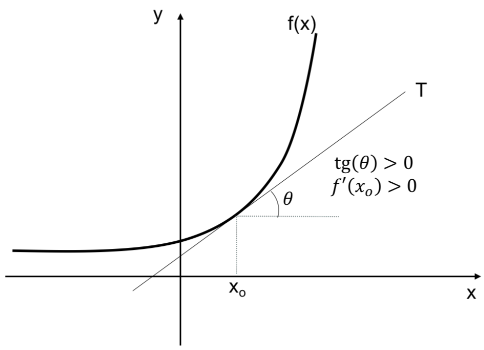
$$x^2 - x = 0 \leftrightarrow x(x-1) = 0 \leftrightarrow x = 0 \; ou \; x = 1$$

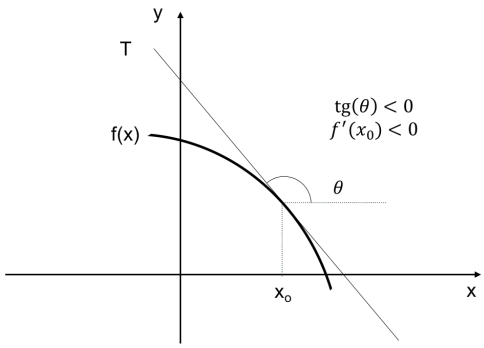
A informação de que $x = 0$ é intercepto não nos acrescenta em nada, já que sabíamos que $(0, 0)$ é um intercepto. Mas sabemos que em $x = 1$ também temos um intercepto, ou seja, o ponto $(1, 0)$ é um intercepto.

4.3 Crescimento, decrescimento e pontos críticos

Agora usaremos a derivada para estudar o crescimento de uma função. Relembre que a derivada é a taxa de variação de uma função em um ponto específico do domínio, isto é, a derivada é o coeficiente angular da reta tangente no ponto.

Sabemos também que se a reta está inclinada para cima, então seu coeficiente angular($tan(\alpha)$) é positivo, já se a reta aponta para baixo, seu coeficiente angular é negativo, essas duas situações estão ilustradas na figura a seguir:





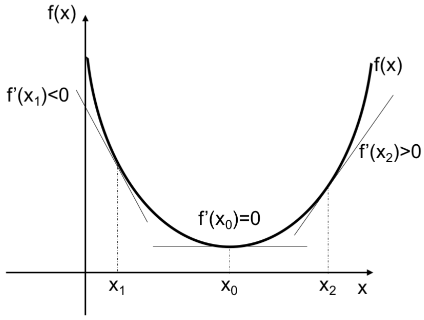
Se a derivada é o coeficiente angular da reta tangente e se a reta tangente está inclinada para cima num ponto, então a derivada neste ponto é positiva, caso contrário a derivada é negativa. O primeiro caso, de a reta tangente no ponto estar inclinada para cima, só acontece quando a função no ponto em questão está crescendo e, o oposto, só acontece quando a função naquele ponto está decrescendo. Portanto, tiramos as conclusões:

$$\text{Se a função está crescendo em } x_0 \rightarrow f'(x_0) > 0$$

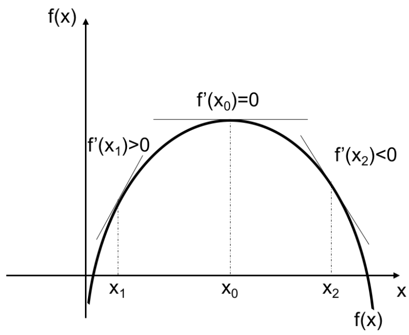
$$\text{Se a função está decrescendo em } x_0 \rightarrow f'(x_0) < 0$$

E quando $f'(x_0) = 0$? Nesse caso, a função não está nem crescendo nem decrescendo. Os pontos onde $f'(x_0) = 0$ são chamados de **ponto crítico**. Um ponto crítico pode ocorrer de três maneiras diferentes:

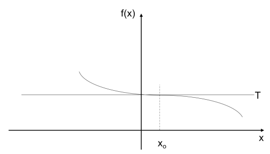
1. Mínimo Local: Se x_0 é um ponto crítico, do lado esquerdo de x_0 a derivada é negativa (função decrescendo) e do lado direito de x_0 a derivada é positiva (função crescendo), então x_0 é um ponto de **mínimo**.

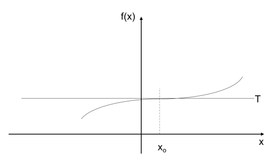


2. Máximo Local: Se x_0 é um ponto crítico, do lado esquerdo de x_0 a derivada é positiva (função crescendo) e do lado direito de x_0 a derivada é negativa (função decrescendo), então x_0 é um ponto de **máximo**.



3. Inflexão: Se x_0 é um ponto crítico, do lado esquerdo de x_0 a derivada é positiva (negativa) e do lado direito de x_0 a derivada é positiva (negativa), então x_0 é um ponto de **inflexão**.





Por ponto de inflexão entendemos um ponto onde há mudança de concavidade, como mostra a figura acima. É importante ressaltar que nem todo ponto de inflexão é um ponto crítico, podemos encontrar pontos de mudança de concavidade que não são pontos críticos.

EXEMPLO 4.3.1 Determine os intervalos de crescimento e decrescimento da função $f(x) = x^3 - 3x$.

Para determinar o crescimento de uma função, devemos estudar o sinal da derivada desta função, lembrando que:

$$\text{Se a função está crescendo em } x_0 \to f'(x_0) > 0$$

$$\text{Se a função está decrescendo em } x_0 \to f'(x_0) < 0$$

Iniciamos, portanto, calculando a derivada de $f(x)$ e igualando a zero ($f'(x) = 0$). Igualamos a zero, pois nos pontos críticos, ou seja, onde $f'(x) = 0$, o sinal da derivada pode mudar, e portanto o crescimento da função pode mudar.

$$\begin{gathered} f(x) = x^3 - 3x \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \\ 3x^2 - 3 = 0 \\ x^2 = 1 \\ x = -1 \text{ ou } x = 1 \end{gathered}$$

Desta forma, $x = -1$ e $x = 1$ são pontos críticos e, portanto, candidatos a mudança de crescimento.

Para $x < -1$, note que $f'(x) > 0$. Uma maneira rápida de verificar isso é calcular a derivada de um ponto menor do que -1. Por exemplo, $f'(-2) = 3.(-2)^2 - 3 = 9 > 0$. Como a derivada é positiva, $f(x)$ é crescente para todo $x < -1$.

Para $-1 < x < 1$, $f'(x) < 0$ e, portanto $f(x)$ é decrescente.

Finalmente para $x > 1$, $f'(x) > 0$ e, portanto $f(x)$ é crescente.

4.4 Segunda derivada, concavidade e pontos de inflexão

Até agora só derivamos uma vez, mas podemos derivar uma função mais de uma vez se desejarmos e se a função derivada for diferenciável. Quando derivamos duas vezes, a função que resultou da segunda derivação se chama "segunda derivada"e usamos a notação $f''(x)$.

EXEMPLO 4.4.1 Calcule a segunda derivada da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$.

Já calculamos a primeira derivada dessa função no exemplo 2.10.4 e encontramos $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$. Para encontrar a segunda derivada, basta derivarmos novamente usando a regra do quociente:

$$f''(x) = \frac{1 \times \sqrt{x^2 - 1} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \times x}{x^2 - 1}$$

Arrumando essa expressão:

$$f''(x) = \frac{-1}{(x^2 - 1)^{\frac{3}{2}}}$$

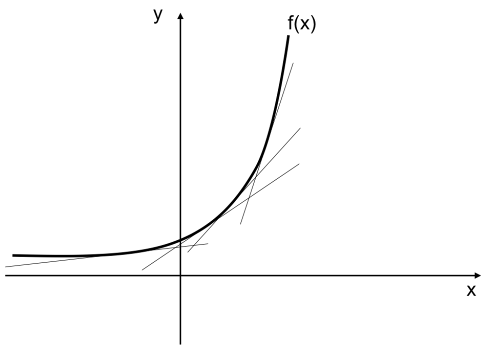
A segunda derivada nos ajudará a descobrir duas informações importantes sobre a função, a saber, qual é a concavidade numa certa região do domínio e onde estão os pontos de inflexão, sendo eles pontos críticos ou não.

Sabemos que a primeira derivada é a taxa de variação de $f(x)$, portanto, a segunda derivada (derivada da derivada) é a taxa de variação de $f'(x)$, ou seja, se $f'(x)$ muda de ponto a ponto, então a segunda derivada nos diz a qual taxa a primeira derivada muda. Os exemplos a seguir podem esclarecer essa ideia.

EXEMPLO 4.4.2 Calcule a segunda derivada de $f(x) = 2x$ e interprete o resultado.

A primeira derivada é $f'(x) = 2$, portanto, $f''(x) = 0$ já que a derivada de uma constante é sempre zero. A interpretação desse resultado é a seguinte: Já dissemos que o gráfico de $f(x) = 2x$ é uma reta, e portanto, a derivada, ou taxa de variação, é constante. Se a derivada é constante, então a sua variação é nula.

A segunda derivada indica a qual taxa a derivada cresce, ou geometricamente, a qual taxa a reta tangente ao gráfico se inclina para cima. Se a segunda derivada é positiva, então isso significa que a reta tangente ao gráfico se inclina cada vez mais para cima quando aumentamos x, como mostra a figura a seguir.



Como vemos pela figura, quando a reta tangente ao gráfico está se inclinando para cima, então a concavidade da função é para cima, o que nos leva ao critério:

Concavidade para cima Se a segunda derivada é positiva em uma certa região do domínio, então nesta região a concavidade é voltada para cima.

Utilizando o mesmo raciocínio estabelecemos o critério:

Concavidade para baixo Se a segunda derivada é negativa em uma certa região do domínio, então nesta região a concavidade é voltada para baixo.

Agora estamos aptos a determinar um critério para encontrar pontos de inflexão. Sabemos que quando a segunda derivada é positiva, a concavidade é voltada para cima e, quando a segunda derivada é negativa, a concavidade é voltada para baixo. Assim, para que haja uma mudança na concavidade é necessário que a segunda derivada se anule.

Pontos de inflexão Se a segunda derivada se anula em um ponto x_0, então x_0 é um ponto de inflexão.

EXEMPLO 4.4.3 Determine a concavidade da função $f(x) = x^3 - 3x$.

Para determinar a concavidade de uma função, devemos estudar o sinal da segunda derivada desta função, lembrando que:

$$\text{Se a função é côncava para cima em } x_0 \to f''(x_0) > 0$$

$$\text{Se a função é côncava para baixo em } x_0 \to f''(x_0) < 0$$

Iniciamos, portanto, calculando a segunda derivada de $f(x)$ e igualando a zero ($f''(x) = 0$). Igualamos a zero, pois nos pontos de inflexão, ou seja, onde $f''(x) = 0$, o sinal da segunda derivada pode mudar, e portanto a concavidade da função pode mudar.

$$\begin{gathered} f(x) = x^3 - 3x \\ f'(x) = 3x^2 - 3 \\ f''(x) = 6x \\ 6x = 0 \\ x = 0 \end{gathered}$$

Desta forma, $x = 0$ é ponto de inflexão e, portanto, candidato a mudança de concavidade.

Para $x < 0$, note que $f''(x) < 0$. Uma maneira rápida de verificar isso é calcular a segunda derivada de um ponto menor do que 0. Por exemplo, $f''(-1) = 6.(-1) = -6 < 0$. Como a segunda derivada é negativa, $f(x)$ é côncava para baixo para todo $x < 0$.

Para $x > 0$, $f''(x) > 0$ e, portanto $f(x)$ é côncava para cima.

4.5 Limites e assíntotas

O último tópico que devemos verificar para fazer o esboço de um gráfico são os limites, que podem nos levar à assíntotas. Estamos interessados em saber o que ocorre com o gráfico da função quando x assume valores muito grandes e nos pontos de descontinuidade.

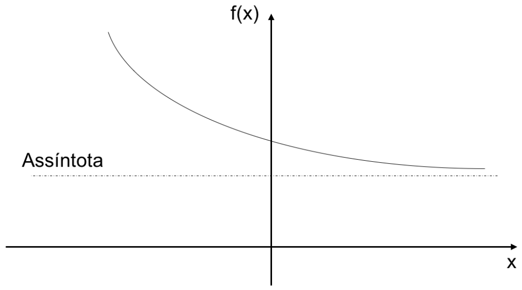
Mas quais limites exatamente temos que calcular? Neste momento você deve recordar da seção sobre assíntotas verticais e horizontais.

Para ver qual é o comportamento da função quando x é muito grande é através dos limites no infinito, ou seja:

$$\lim_{x \to \infty} f(x)$$
$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

Então para estes dois limites podemos ter dois casos:

1. O limite é um número real finito, neste caso temos uma assíntota horizontal. Uma assíntota é uma reta para a qual o gráfico da função tende, mas nunca toca, como exemplificado na figura a seguir:



Se o gráfico da função está tendendo à uma reta, então, isso significa que a $f(x)$ está tendendo a um valor, sem nunca chegar a assumir de fato esse valor, valor este que é justamente o resultado do limite que calculamos.

2. O limite é $+\infty$ ou $-\infty$. Neste caso a função não apresenta assíntotas.

Para ver qual é o comportamento da função em pontos fora do domínio, devemos calcular os limites laterais de quando x tende a um valor que está fora do domínio, ou é borda de um domínio. Se ao calcular estes limites o resultado for $+\infty$ ou $-\infty$, este valor fora do domínio é uma assíntota vertical, pois, também é uma reta para a qual o gráfico da função tende, mas nunca toca. Os exemplos a seguir podem tornar mais clara essa ideia.

EXEMPLO 4.5.1 Considere a função $f(x) = \frac{1}{x-1}$. Quais são os limites que devemos fazer? Quais são as assíntotas desse gráfico?

Solução: Antes de qualquer coisa, devemos determinar o domínio dessa função, que é $D_f = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$. Dois limites que sempre temos que fazer são $\lim_{x\to+\infty}$ e $\lim_{x\to-\infty}$.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-1} = 0$$

Portanto, temos uma assíntota horizontal nesse gráfico que é a reta $y = 0$.

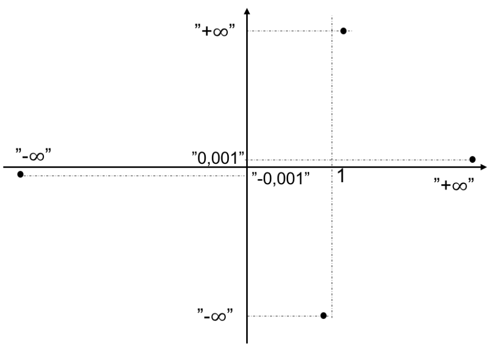
Agora temos que fazer o limite de x tendendo ao valor que está fora do domínio, $x = 1$. Aqui temos que lembrar que x pode tender a 1 de duas maneiras, pela direita ou pela esquerda, assim, temos que fazer os dois limites

$$\lim_{x\to1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

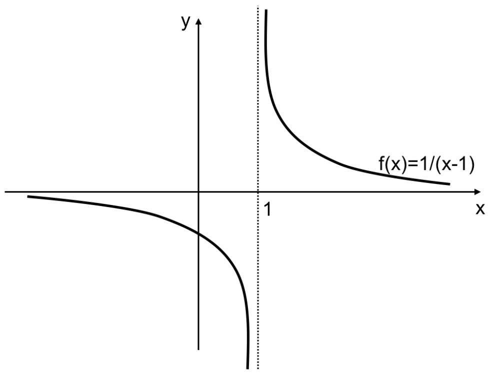
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

E aqui encontramos uma assíntota vertical que é a reta $x = 1$. Agora vamos aprender a colocar as informações que encontramos no plano cartesiano e quando vermos o resultado final tudo ficará mais claro.

Primeiro colocamos os pontos que encontramos "$(+\infty, 0, 000001)$", "$(-\infty, -0, 00001)$", "$(1, 00001, +\infty)$"e "$(0, 9999, -\infty)$".



Agora que temos os pontos que encontramos nos limites, basta ligarmos esses pontos e temos um esboço do gráfico.



Agora fica claro que a reta $x = 1$ é uma assíntota vertical.

4.6 Resumindo Estudo Completo e Esboçando gráficos

Vamos fazer um rápido resumo sobre estudo completo. Para esboçar gráfico de funções devemos seguir 6 passos:

1) Domínio:

Alguns domínios importantes que temos que saber são:

$$\text{Se } f(x) = \frac{1}{x}, \text{ o domínio é } D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$
$$\text{Se } f(x) = e^x, \text{ o domínio é } D_f = \ x \in \mathbb{R}$$
$$\text{Se } f(x) = \sqrt{x}, \text{ o domínio é } D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$
$$\text{Se } f(x) = ln(x), \text{ o domínio é } D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$$

2) Interceptos:

Intercepto do eixo y $\rightarrow x = 0$

Intercepto do eixo x $\rightarrow f(x) = 0$

3) Crescimento:

Se a função é crescente em $x_0 \rightarrow f'(x_0) > 0$

Se a função é decrescente em $x_0 \rightarrow f'(x_0) < 0$

Deve-se calcular a derivada e estudar todos os pontos onde $f'(x) = 0$ e também os pontos fora do domínio.

4) Concavidade:

Se a função é côncava para cima em $x_0 \rightarrow f''(x_0) > 0$

Se a função é côncava para baixo em $x_0 \rightarrow f''(x_0) < 0$

Deve-se calcular a segunda derivada e estudar todos os pontos onde $f''(x) = 0$ e também os pontos fora do domínio.

5) Assíntotas:

Assíntotas Horizontais: Calcular os limites no infinito ($\lim_{x\to\infty} f(x)$ e $\lim_{x\to-\infty} f(x)$) quando estes pertencerem ao domínio.

Assíntotas Verticais: Calcular os limites laterais dos pontos fora do domínio e/ou extremos do domínio.

6) Desenho do gráfico

EXEMPLO 4.6.1 Esboce o gráfico da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$.

a) Domínio: Sempre que esboçarmos um gráfico, antes de qualquer coisa, devemos determinar qual é o domínio da função. Neste caso, o que está dentro da raiz não pode assumir valores negativos, portanto, x não pode assumir valores entre -2 e 2.

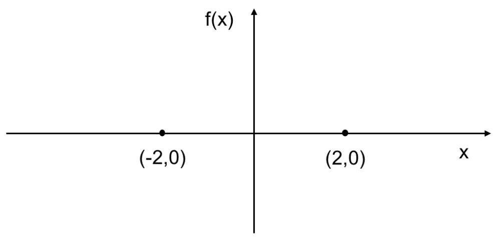
$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \; ou \; x \geq 2\}$$

b) Interceptos: Para calcular os interceptos, basta fazermos $x = 0$ para encontrarmos o intercepto em y e $f(x) = 0$ para encontrarmos o intercepto em x. Neste caso, vemos que $x = 0$ não está no domínio e, como consequência, a função não apresenta interceptos em y.

Agora vamos fazer $f(x) = 0$ e encontrar qual valor de x será o intercepto no eixo x.

$$\sqrt{x^2 - 4} = 0$$

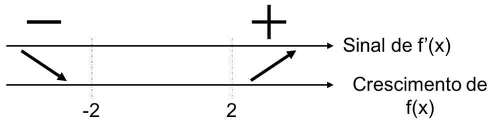
Obviamente, esta equação é satisfeita para $x = 2$ ou $x = -2$. Isso significa que a função apresenta dois interceptos, um em $(2, 0)$ e outro em $(-2, 0)$. Neste passo, podemos começar a esboçar o gráfico. Vamos colocar no plano cartesiano os pontos que são interceptos:



c) Crescimento e pontos críticos. Para saber se uma função está crescendo, decrescendo ou em um ponto crítico, precisamos olhar a primeira derivada.

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}}$$

Sabemos que quando $f'(x) > 0$, então a função está crescendo e quando $f'(x) < 0$, a função está decrescendo. O denominador da derivada é sempre positivo, portanto, o que vai mandar no sinal derivada é o numerador, quando $x > 0$, então, $f(x) > 0$ e quando $x < 0$, então, $f(x) < 0$, já que o numerador determina o sinal da derivada. Portanto, a função cresce para $x > 0$ e decresce para $x < 0$. Esquematicamente:



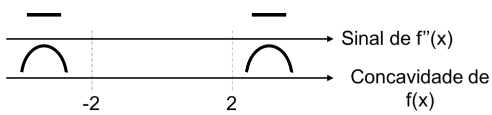
d) Concavidade e pontos de inflexão: Como sabemos, para determinar a concavidade da função, ou encontrar os pontos de inflexão, devemos olhar a segunda derivada:

$$f''(x) = \frac{1 \times \sqrt{x^2 - 4} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2-4}}}{x^2 - 4}$$

Arrumando a expressão:

$$f''(x) = \frac{-4}{(x^2 - 4)^{\frac{3}{2}}}$$

Como o denominador é sempre positivo e o numerador é uma constante negativa, então, $f''(x)$ é sempre negativo, o que significa que a concavidade da função é voltada para baixo em todo o seu domínio. Esquematicamente:

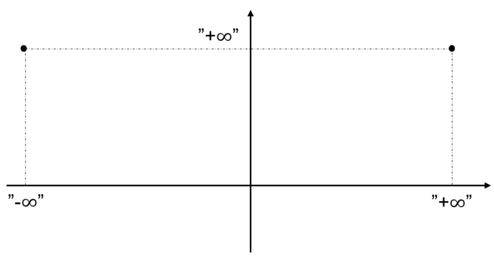


e)Limites e assíntotas: Agora queremos saber qual o comportamento da função nos "infinitos"e também nas bordas do domínio. Neste caso, como as bordas do domínio $x = -2$ e $x = 2$ pertencem ao domínio, não é necessário calcular estes limites. Portanto, nesta função temos que fazer dois limites:

$$lim_{x \to +\infty} f(x)$$
$$lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$$

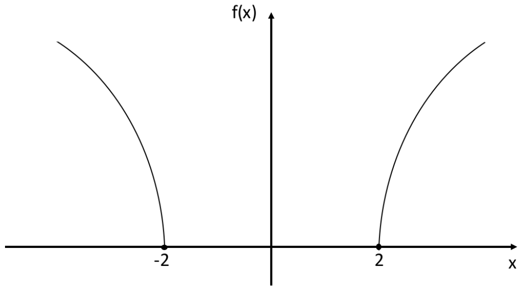
$$lim_{x \to -\infty} f(x)$$
$$lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

Agora vamos colocar no nosso gráfico essa nova informação. Usaremos um abuso de notação para isso. Sabemos que, quando $x \to +\infty$ então $f(x) \to +\infty$ e isso nos dá o "ponto"$(+\infty, +\infty)$. Do mesmo modo que $x \to -\infty$ nos dá o "ponto"$(-\infty, +\infty)$. Colocando esses pontos no gráfico:



f) Desenho do Gráfico: Agora estamos aptos a terminar o esboço deste gráfico, para isso, basta ligarmos os pontos que já temos de acordo com as informações que extraímos dos passos **c)** e **d)**. Sabemos que a função é sempre crescente para $x > 0$ e, além disso, sempre cresce com a concavidade voltada para baixo.

Para $x < 0$ a função sempre decresce também com a concavidade voltada para baixo. Ligando os pontos:



E assim concluímos o esboço.

EXEMPLO 4.6.2 Esboce o gráfico da função $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$.

a)Domínio: Sabemos que o domínio da exponencial são todos os números reais, portanto, a única restrição que temos é no denominador do expoente, que não pode ser zero. Portanto, o domínio é:

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$$

b)Interceptos: Como $x = 0$ não está no domínio da função, então, esta função não tem intercepto em y. Fazendo $y = 0$, temos:

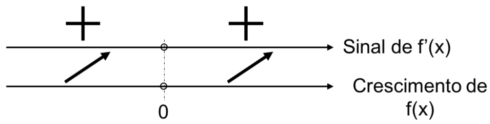
$$0 = e^{-\frac{1}{x}}$$

Qualquer que seja o expoente da exponencial, o resultado nunca será zero, poderá ser muito próximo de zero, mas nunca chegará lá. Logo, esta função não possui interceptos.

c)Crescimento, decrescimento e pontos críticos: Vamos olhar a primeira derivada da função:

$$f'(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Lembramos que a exponencial é sempre positiva, independente do expoente. Como o denominador x^2 também é sempre positivo, então, segue que $f'(x)$ é sempre positiva. Notamos também que $f'(x)$ nunca se anula, pois, a exponencial nunca se anula. Assim, $f(x)$ é sempre uma função crescente e não apresenta nenhum ponto crítico. Esquematicamente:



d)Concavidade e pontos de inflexão: Vamos olhar a segunda derivada da função:

$$f''(x) = \frac{\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^2} \times x^2 - e^{-\frac{1}{x}} \times 2x}{x^4} = \frac{e^{-\frac{1}{x}}(1-2x)}{x^4}$$

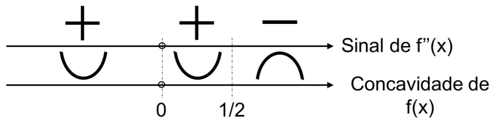
O denominador de $f''(x)$ é sempre positivo, portanto, quem "manda"no sinal de $f''(x)$ é o numerador. Como a exponencial é sempre positiva, basta analisarmos o sinal do fator $(1-2x)$.

$$1 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Portanto, em $x = \frac{1}{2}$ temos um ponto de inflexão. Agora precisamos saber onde a concavidade é voltada para cima e onde é voltada para baixo. Sabemos que onde a concavidade é voltada para cima, $f''(x)$ é maior do que zero, então, basta encontrarmos os valores de x que fazem com que $f''(x) > 0$. Para isto, resolvemos a inequação:

$$1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

Assim, para qualquer $x < \frac{1}{2}$ a concavidade da função é voltada para cima. Obviamente, se $x > \frac{1}{2}$ a concavidade será voltada para baixo.



e)Limites e assíntotas: Vamos primeiro calcular os limites no infinito:

$$\lim_{x \to +\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

Pois, quando x é muito grande, o expoente é muito pequeno e, como consequência, a exponencial tente a 1 (você pode ver isso no gráfico da exponencial).

$$\lim_{x \to -\infty} e^{-\frac{1}{x}} = 1$$

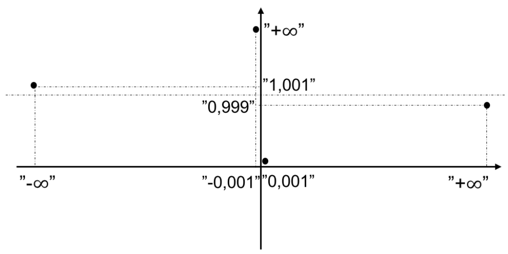
Pelo mesmo raciocínio anterior. Agora precisamos fazer o limite de x se aproximando de 0, tanto pela direita, como pela esquerda:

$$\lim_{x \to 0^+} e^{-\frac{1}{x}} = 0$$

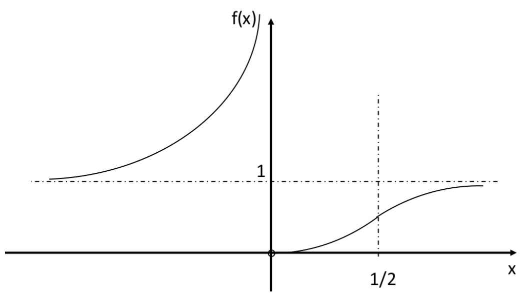
Pois, quando $x \to 0^+$, então, $-\frac{1}{x} \to -\infty$ e pelo gráfico da exponencial, quando o expoente tende a $-\infty$, a exponencial tende para 0.

$$\lim_{x \to 0^-} e^{-\frac{1}{x}} = +\infty$$

Pois, quando $x \to 0^-$, então, $-\frac{1}{x} \to +\infty$, e portanto, a exponencial tende a $+\infty$.
Agora vamos colocar no gráfico os pontos que encontramos nos limites:



f) Desenho do gráfico: Para construir o gráfico, basta ligar esses pontos lembrando das informações que coletamos nos itens anteriores:



Exercícios 4.6.1

Esboce os gráficos das seguintes funções:

a) $f(x) = ln(\frac{x^2}{1+x^2})$.

b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

c) $f(x) = xe^x$

d) $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$

e) $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$

f) $e^x - e^{3x}$

g) $f(x) = xe^{x^2}$

h) $f(x) = xlnx$

i) (Desafio) $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$

5 Problemas de otimização

Problemas de otimização são aqueles nos quais desejamos minimizar ou maximizar uma função. Por exemplo, podemos ter a receita como função da quantidade produzida ($R = f(q)$) e queremos encontrar o máximo dessa função, ou seja, a quantidade produzida que dá a máxima receita.

Como vimos no capítulo anterior, para encontrar pontos de máximo e/ou de mínimo de uma função devemos derivá-la e igualar a derivada a zero:

$$f'(x) = 0$$

Para encontrar pontos de máximo ou mínimos de uma função, devemos:

1. Encontrar a função que queremos maximizar ou minimizar e deixá-la em função de apenas uma variável.

2. Derivar a função e igualar a zero obtendo os pontos que satisfazem a equação resultante.

3. Verificar se é um ponto de máximo ou mínimo através do teste da segunda derivada.

EXEMPLO 5.1 Determine as dimensões de um pátio retangular de $400m^2$ de área para que, ao murá-lo, gaste-se o mínimo possível de material. Suponha que um dos muros já esteja semi acabado e, por isso, tem seu custo reduzido à metade.

Solução: Do enunciado, vemos que queremos determinar "as dimensões do pátio"e, portanto estas serão nossas variáveis. Vamos chamar os lados do pátio de a e b.

Do enunciado também, vemos que queremos minimizar o custo de material. Assim, devemos escrever o custo como função de a e b. O custo por metro quadrado é dado por:

$$C(a, b) = 2a + b + \frac{b}{2}$$

Pois, um dos lados (neste caso um dos lados b) tem o custo reduzido pela metade.

Mas temos um problema: a função custo está como função de duas variáveis (a e b). Para deixar em função de uma única variável, podemos usar uma relação entre a e b dada no enunciado: a área do terreno. Então:

$$ab = 400 \;\Rightarrow\; a = \frac{400}{b}$$

Substituindo em (26):

$$C(b) = 2\frac{400}{b} + \frac{3b}{2}$$

Para encontrar b que de o custo mínimo, basta derivar e igualar a zero:

$$C'(b) = \frac{3}{2} - \frac{800}{b^2} = 0 \;\Rightarrow\; b = \frac{40}{3}\sqrt{3}$$

Como $a = \frac{400}{b}$, então, $a = 10\sqrt{3}$.

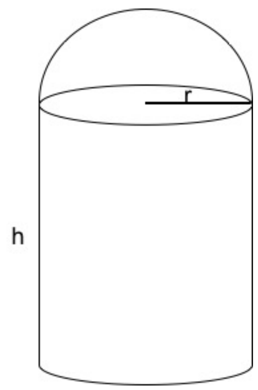
Podemos mostrar que $b = \frac{40}{3}\sqrt{3}$ é de fato ponto de mínimo através do teste da segunda derivada. Derivando novamente a função custo temos:

$$C''(b) = \frac{1600}{b^3}$$

Para $b = \frac{40}{3}\sqrt{3}$ note que $C''(b) > 0$. Como consequência, $C(b)$ possui concavidade para cima em $b = \frac{40}{3}\sqrt{3}$ e, portanto, este é ponto de mínimo.

EXEMPLO 5.2 Um sólido será construído acoplando-se a um cilindro circular reto, de altura h e raio r, uma semi-esfera de raio r. Deseja-se que a área da superfície do sólido seja 5π. Determine r e h para que o volume seja máximo.

Solução: A área de superfície do sólido é a área da semi-esfera mais a área do cilindro sem uma das tampas:



$$A = 5\pi = 2\pi r^2 + 2\pi rh + \pi r^2 \;\Leftrightarrow\; 3r^2 + 2rh - 5 = 0$$

Resolvendo para h:

$$h = \frac{5}{2r} - \frac{3r}{2}$$

A fórmula para o volume é:

$$V(r,h) = \frac{2\pi r^3}{3} + \pi r^2 h$$

Antes de derivar o volume e igualar a zero para encontrar o volume máximo, devemos substituir h por r:

$$V(r) = \frac{2\pi r^3}{3} + \pi r^2(\frac{5}{2r} - \frac{3r}{2}) \Rightarrow V'(r) = -\frac{5\pi r^2}{2} + \frac{5\pi}{2} = 0$$

Resolvendo:

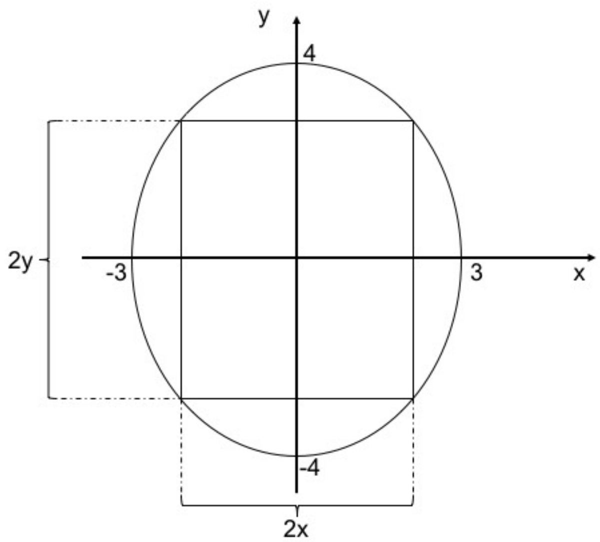
$$r = 1$$

$$h = \frac{5}{2r} - \frac{3r}{2} = 1$$

São r e h que fazem com que o volume seja máximo.

EXEMPLO 5.3 Determinar o retângulo de área máxima que tenha lados paralelos aos eixos coordenados e que esteja inscrito na elipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Solução: Pela figura, a área do retângulo inscrito é dada por:



$$A = 2x2y$$

y pode ser escrito como função de x utilizando a equação da elípse:

$$A(x) = \frac{16}{3}x\sqrt{9 - x^2}$$

Precisamos encontrar x que faça com que a área seja máxima, isto é, encontrar x que satisfaça:

$$A'(x) = 0$$

$$A'(x) = \frac{16}{3}(\sqrt{9 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}}) = 0$$

$$\sqrt{9 - x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{9 - x^2}} = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow y = \sqrt{16 - x^2 \frac{16}{9}} = \sqrt{16 - \frac{9}{2}\frac{16}{9}} = 2\sqrt{2}$$

E assim fica determinado o retângulo inscrito com área máxima.

Exercícios 5.1

a) Um fazendeiro possui 2.400m de cerca e quer cercar um terreno retangular que fica na margem de um rio. Ele não precisa colocar cerca no lado do terreno que fica ao longo do rio. Quais as dimensões do campo que tem a maior área?

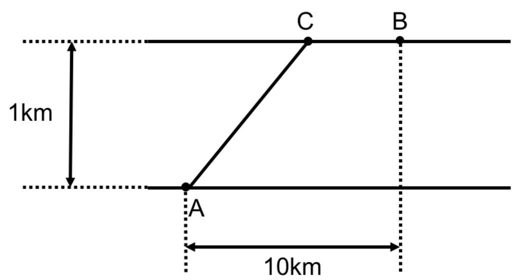
b) Deseja-se construir uma caixa, de forma cilíndrica, de 1 m^3 de volume. Nas laterais e no fundo será utilizado material que custa R$ 10 o metro quadrado e na tampa material de R$ 20 o metro quadrado. Determine as dimensões da caixa que minimizem o custo do material empregado.

c) Suponha que o custo total, em função da quantidade produzida seja dado por $C(q) = q^2 - 50q + 2500$, onde q é a quantidade produzida e $40 \leq q \leq 80$. Determine a quantidade q que deverá ser produzida para minimizar o custo unitário médio, ou seja, o custo por unidade.

d) Determine o ponto da parábola $y = 1 - x^2$ que se encontra mais próximo da origem.

e) Uma janela normanda tem o formato da justaposição de um semicírculo sobre um retângulo. Considerando uma janela normanda com perímetro igual a 9 m, determine as dimensões da janela para que sua área A seja a maior possível.

f) As cidades A e B estão em margens opostas de um rio retilíneo de 1km de largura, sendo que B está à jusante do rio 10 km de A. Elas devem ser ligadas por um cabo elétrico e o custo do metro do cabo submarino (utilizado dentro do rio) é 5 vezes maior do que o do cabo por terra (utilizado nas margens). Qual o comprimento do cabo submarino e do cabo por terra cujo custo total é mínimo?



g) Num lançamento de uma moeda n vezes, a probabilidade de se obter um "cara"nos primeiros m lançamentos é $f(p) = p^m.(1-p)^{(n-m)}$, onde $0 \leq p \leq 1$ é a probabilidade de ocorrer cara num único lançamento. Determine o valor de p para que a probabilidade $f(p)$ seja máxima.

h) Para fabricar uma caixa sem tampa utiliza-se um pedaço de cartolina quadrado de lado 12cm. Em cada canto da cartolina deve-se recortar um quadradinho de lado x. Determine o valor de x de modo que o volume da caixa seja máximo. Qual é o volume máximo?

i) A velocidade média dos veículos em um trecho da Marginal Tietê, entre 06h00 e 10h00, em um dia de semana comum é aproximada pela função

$$f(t) = 20t - 40\sqrt{t} + 50, \quad t \in \mathbb{R},\ 0 \leq t \leq 4$$

Onde $f(t)$ é medido em km/h e t é medido em horas, com $t = 0$ correspondendo a 06h00. Em qual hora da manhã o tráfego fica mais lento? E quando fica mais rápido? Qual a velocidade média de um veículo nestes momentos?

j) Um fazendeiro possuí um terreno de $600m^2$ e deseja dividí-lo em 6 partes iguais. Ele considera fazer a divisão de duas maneiras (1) colocando 5 cercas paralelas ao menor lado do terreno, ou (2) colocando uma cerca paralela ao lado maior e então outras duas cercas paralelas ao lado menor. Considerando que, além das divisões, a cerca também deve ser usada para cercar o entorno terreno, determine qual das duas maneiras minimiza a quantidade de cerca utilizada.

k) Um arame de comprimento L é cortado em dois pedaços. Um dos pedaços é dobrado na forma de um quadrado e o outro pedaço é dobrado na forma de um círculo. Determine, em função de L, o ponto em que devemos cortar o arame de forma a minimizar a área total (área do círculo + área do quadrado).

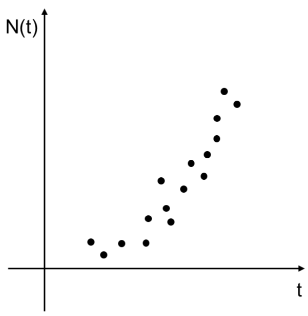
l) (Desafio) Considerando a curva $y = 1 - x^2$, com $1 \leq x \leq 0$. Em qual ponto da curva devemos traçar uma reta tangente tal que a área do triângulo que esta reta tangente forma com os eixos coordenados seja máxima?

6 Algumas Aplicações práticas de derivada

Nesta seção vamos ver algumas aplicações práticas do derivada: Método dos Mínimos Quadrados e Aplicações em economia (funções marginais e elasticidade).

6.1 Método dos Mínimos Quadrados

Suponha que coletamos dados de um certo fenômeno como, por exemplo, o crescimento de uma certa colônia de bactérias. Então a cada dia, de alguma maneira, fazemos uma estimativa de quantas bactérias existem na colônia e, a cada contagem, temos um ponto no gráfico do número estimado de bactérias em função do tempo:



Nosso objetivo é tentar determinar uma função que melhor se ajusta a esses dados, ou seja, uma função que passa o mais perto possível dos pontos que coletamos. O método dos mínimos quadrados é um método para determinar essa função.

Se "chutarmos"uma função do segundo grau que passe pela origem e seja proporcional a x^2, como ax^2, então a diferença entre cada ponto que coletamos e a função que queremos ajustar é:

$$y_i - ax_i^2$$

y_i indica a i-ésima ordenada do i-ésimo ponto coletado e x_i a respectiva abscissa. Nosso objetivo é determinar o coeficiente a que fará com que a curva se ajuste bem a esses dados. Uma ideia seria somar todas essas diferenças, que são os erros, e minimizar essa soma (soma dos erros) derivando com relação ao coeficiente a e igualando a zero. Ou seja, a soma dessas diferenças, ou erro total, é uma função de a e essa função apresenta um mínimo em algum valor de a. Como essas diferenças podem ser positivas ou negativas e estamos somente interessados nos valores absolutos, vamos elevar todas ao quadrado. Usando o símbolo de somatório para abreviar a soma dessas diferenças:

$$f(a) = \sum_{i=0}^{n}(y_i - ax_i^2)^2 = (y_1 - ax_i^2)^2 + (y_i - ax_2^2)^2 + ... + (y_n - ax_n^2)^2$$

O valor de a que minimiza essa função nos dará a curva que melhor se ajusta aos dados:

$$f'(a) = \sum_{i=0}^{n} 2(y_i - ax_i^2)(-x_i^2) = 0$$

É importante ressaltar que estamos derivando com relação à variável a e não com relação à variável x. Por isso, talvez você não tenha entendido a derivação. Derive com relação à a e certifique-se de que o resultado está correto. Como estamos interessados em determinar a:

$$2\sum_{i=0}^{n} ax_i^4 - y_i x_i^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; a = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_{i^2}}{\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^4}$$

E assim fica determinada a curva que melhor se ajusta aos dados.

EXEMPLO 6.1.1 Num certo estudo verificou-se que um conjunto de pontos (x_i, y_i) se ajusta aproximadamente à curva de uma função cúbica $f(x) = bx^3$. Utilizando o método dos mínimos quadrados, determine a fórmula para calcular o valor de b da função acima.

Solução: Devemos minimizar a função

$$f(b) = \sum_{i=0}^{n} (y_i - bx_i^3)^2$$

Portanto:

$$f'(b) = 2\sum_{i=0}^{n} (y_i - bx_i^3)(-x_i^3) = 0 \;\Leftrightarrow\; \sum_{i=0}^{n} -y_i x_i^3 + b\sum_{i=0}^{n} x_i^6 = 0$$

$$\Rightarrow b = \frac{\sum\limits_{i=0}^{n} y_i x_i^3}{\sum\limits_{i=0}^{n} x_i^6}$$

6.2 Aplicações na economia

Funções Marginais: Em economia, o cálculo é bastante utilizado. Uma das aplicações mais simples é a ideia de funções marginais, como receita marginal, produtividade marginal, custo marginal e lucro marginal. A palavra marginal é sinônimo de derivada. Isto é, se conhecemos, por exemplo, a função custo $C(x)$ como função da quantidade x produzida, então a sua derivada $Cmg = C'(x)$ é o custo marginal.

As funções marginais nos fornecem informação relevante quando calculado para algum valor específico x_0 que x pode assumir, no caso do custo marginal, $C'(x_0)$. A quantidade $C'(x_0)$ mede a sensibilidade do custo quando $x = x_0$, isto é, a pergunta que essa quantidade responde é: Se aumentarmos uma unidade produzida, a partir de x_0, então como o custo vai mudar relativo a esta mudança?

Assim, se adotarmos, por exemplo, uma quantidade produzida $x_0 = 10$ e ao calcularmos a função custo marginal $Cmg(x_0) = C'(10) = 15$ podemos afirmar que se produzirmos uma unidade a mais, a partir da 10a unidade, ou seja, se produzirmos a 11a unidade, o custo será, aproximadamente 15 maior do que o custo da produção de 10 unidades. O mesmo ocorre para as demais funções marginais.

EXEMPLO 6.2.1 Considere a função que modela o custo de fabricação de uma marca de sapatos como função do número de unidades produzidas $C(x) = 110 + 4x + 0,02x^2$. Determine $Cmg(100)$ e interprete o resultado.

Solução: Vamos primeiro determinar a função custo marginal: $Cmg(x) = C'(x) = 4 + 2 \times 0,02x$.

A sensibilidade do custo quando o número de unidades produzidas é 100 é então, $Cmg(100) = 8$. Este resultado nos indica que se mudarmos a quantidade produzida de uma unidade, partindo de 100, ou seja se produzirmos a 101a unidade, o custo aumentará em 8 unidades.

EXEMPLO 6.2.2 Considere a função demanda data por $p = 30 - 2x$, onde p é o preço e x a quantidade produzida, obtenha a receita marginal.

Solução: Vamos primeiro determinar a função receita dada multiplicando-se preço pela quantidade: $R = p.x \Rightarrow R(x) = (30 - 2x)x = 30x - 2x^2$.

Agora, vamos determinar a receita marginal, derivando a receita: $Rmg(x) = R'(x) = 30 - 4x$. A receita marginal indica, aproximadamente, a variação da receita decorrente da venda de uma unidade adicional, a partir de x unidades.

Elasticidade: Outra aplicação de cálculo na economia é a elasticidade. A elasticidade é uma medida da sensibilidade da variação da demanda em função do preço. Um medicamento contra o câncer é um exemplo de um bem pouco elástico (baixa elasticidade), pois pessoas não irão comprar mais remédios contra o câncer se houver redução no preço, então a demanda é pouco sensível às variações de preço. Cerveja, por outro lado, é um bem extremamente elástico (alta elasticidade), pois caso haja uma grande promoção, muita gente irá aumentar a quantidade comprada e caso haja um aumento de preço, as pessoas irão migrar para produtos substitutos. Assim, no caso da cerveja, a demanda é muito sensível à variação de preço.

Considere que conhecemos a função preço de um produto como função da demanda $p(x)$. Um indicador da sensibilidade da demanda seria $p'(x)$, mas se medirmos o preço em R$ por Kg e a demanda em Kg, então a relação $p'(x_0)$ seria uma, mas se a demanda fosse medida em g ao invés de Kg, então a relação $p'(x_0)$ seria outra. Para superar essa dependência, introduzimos a elasticidade, que é definida como:

$$e = \frac{p_0}{x_0}|\frac{dx}{dp}|$$

Assim, eliminamos a dependência com relação à unidade utilizada. Na fórmula acima, p_0 é o preço inicial, x_0 é a demanda inicial e $|\frac{dx}{dp}|$ é o módulo da derivada da quantidade em relação ao preço no ponto (x_0, p_0).

EXEMPLO 6.2.3 Considere a demanda como função do preço ser modelada por $x(p) = 500 - 10p$. Determine a elasticidade em $p_0 = 10$. Interprete o resultado.

Solução: Neste caso, a derivada da quantidade em função do preço é: $\frac{dx}{dp} = -10$, então a elasticidade será:

$$e = \frac{p_0}{x_0}10$$

se $p_0 = 10$ e portanto $x(p_0) = 400$, então, $e = \frac{10}{40}10 = 0,25$. A interpretação é a seguinte: "Um aumento de 1% no preço, a partir do preço inicial de $p_0 = 10$ provocaria uma redução na demanda de aproximadamente 0,25%". De forma análoga, poderiamos dizer que "Uma redução de 1% no preço, a partir do preço inicial de $p_0 = 10$ provocaria um aumento na demanda de aproximadamente 0,25%".

Tipicamente, se $e < 1$ a demanda é inelástica, ou seja, a demanda é pouco sensível à variação do preço. Por outro lado, se $e > 1$, a demanda é elástica. Por fim, se $e = 1$, então a demanda tem elasticidade unitária.

Exercícios 6.2.1

a) Determine as funções do custo unitário médio e do custo marginal, onde o custo total é dado por $C(x) = 2x^3 - 10x^2 + 30x + 100$

b) Determine as funções da receita unitária média e da receita marginal, onde a receita total é dada por $R(x) = -10x^2 + 1000x$

c) Se a equação de demanda for dada por $x = \frac{10-p}{5}$, obtenha a elasticidade para demanda em $p_0 = 5$. Interprete o resultado.

7 Problemas de taxas relacionadas

O estudo de taxas relacionadas envolve um problema físico onde há duas ou mais grandezas variando simultaneamente. O objetivo é encontrar a taxa de variação de uma grandeza em função da taxa de variação das outras e das condições iniciais.

Para ilustrar um problema de taxas relacionadas, considere um balão circular no qual está sendo bombeado ar a uma taxa constante. O volume e o raio do balão variam com o tempo. Imagine que a taxa de variação do volume é conhecida, digamos $1m^3/min$. Queremos agora determinar a taxa de variação do raio.

Antes de mais nada, é necessário saber as condições iniciais. Intuitivamente, quando o balão é pequeno o raio irá crescer rapidamente, mas conforme seu volume aumenta, a taxa de crescimento do raio reduz. Sendo assim, a taxa de variação do raio depende de em qual instante. Vamos assumir como condição inicial que queremos determinar a taxa de variação do raio quando o raio $r = 2m$.

O procedimento para encontrar resolver problemas de taxas relacionadas é o seguinte:

1. Encontrar uma equação que relacione as grandezas (no caso acima, o volume e o raio). Uma relação entre o raio e o volume é a equação do volume da esfera $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$.

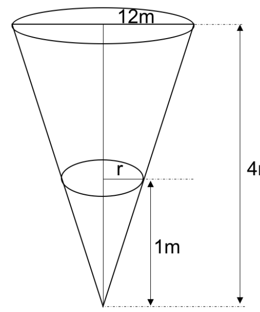
2. Derivar implicitamente os dois lados dessa equação com relação ao tempo. Aqui precisamos usar a regra da cadeia:

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{4}{3}\pi r^3 \\ \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \end{aligned}$$

3. Substituir as condições iniciais do problema.
O passo 2 nos deu a relação entre as taxas de variação do volume e do raio. Agora basta substituirmos os dados iniciais do exercício. A taxa de variação do volume $\frac{dV}{dt}$ é conhecida: $1m^3/min$. Além disso, o raio inicial é conhecido: $r = 2m$. Agora é só substituir e encontrar a taxa de variação do raio $\frac{dr}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \\ 1 &= 4\pi 2^2 \frac{dr}{dt} \\ \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{16\pi} m/min \end{aligned}$$

EXEMPLO 7.1 Um tanque tem a forma de um cone circular reto invertido, com 4m de altura e raio da base 2m. Se a água entra no tanque à razão de $0,001m^3/min$, calcule a razão em que o nível de água está subindo quando a altura é 1m.



Solução: O exercício nos deu que $\frac{dV}{dt} = 0,001m^3/min$, ou seja, a taxa com que o volume da água aumenta com o tempo é constantemente 0,001. Queremos calcular a taxa com que o nível, ou a altura, da água está crescendo quando a altura é $h = 1m$. Para isso, precisamos relacionar a taxa de variação do volume com a taxa de variação da altura. Primeiro, vamos escrever a fórmula para o volume do cone (que relaciona as grandezas):

$$V(r,h) = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Utilizando uma semelhança de triângulos, podemos relacionar o raio com a altura em cada instante:

$$\frac{4}{2} = \frac{h}{r} \;\Rightarrow\; r = \frac{h}{2}$$

Substituindo na fórmula do volume temos a relação entre volume e altura para este exercício:

$$V(h) = \frac{1}{12}\pi h^3$$

Derivando ambos os lado com relação o tempo:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12}3h^2\frac{dh}{dt}$$

No instante t_0 onde $h(t_0) = 1$:

$$0,001 = \frac{\pi}{4}\frac{dh}{dt}(h_0) \;\Rightarrow\; \frac{dh}{dt}(h_0) = \frac{4}{\pi 1000}$$

EXEMPLO 7.2 Às 8h o navio A está a 25km ao sul do navio B. Se o navio A está navegando para o oeste à 16km/h e o navio B está navegando para o sul a 20km/h então determine a razão em que a distância entre os navios está variando às 8h30min.

$a(t) = 16t$ é a distância que A percorre no tempo t e $b(t) = 25 - 20t$ é a distância que B percorre no tempo t. Onde t mediremos em horas a partir das 8h, ou seja, às 8h, $t = 0$. Queremos saber a qual taxa está variando a distância $d(t)$ em $t_0 = \frac{1}{2}$. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$d(t) = \sqrt{(25 - 20t)^2 + (16t)^2}$$

Como queremos $d'(t_0 = \frac{1}{2})$:

$$d'(t) = \frac{1}{2}\frac{2(25 - 20t)(-20) + 2(16)^2 t}{\sqrt{(25 - 20t)^2 + (16t)^2}}$$

Substituindo $t_0 = \frac{1}{2}$:

$$d'(\frac{1}{2}) = -\frac{172}{17}\frac{km}{h}$$

Exercícios 7.1

a) Uma escada de 6m de comprimento está apoiada em uma parede vertical. Se a base da escada começa a escorregar horizontalmente à taxa constante de 0,6m/s, com que velocidade o topo da escada percorre a parede quando ele está a 4m do solo?

b) Suponha que uma bola de neve esteja se derretendo, com raio decrescendo à razão constante, passando de 30cm para 20cm em 45 minutos. Qual a variação do volume quando o raio está com 25cm?

c) Uma plataforma de extração de petróleo tem um vazamento deixando cair no mar 10 metros cúbicos de petróleo por hora. Esse petróleo está provocando uma mancha circular de 1 milímetro de espessura e cujo raio está crescendo continuamente. Determine a velocidade de crescimento do raio desta mancha, no instante em que o raio é de 0,5km.

d) Um refugiado começa a correr em linha reta (de oeste para leste) a uma velocidade constante de $4m/s$. Um holofote localizado a 20 metros ao sul do ponto de início da corrida focaliza o refugiado frontalmente quando ele começa a correr e o acompanha durante a corrida. A que taxa o holofote está girando 5 segundos após o refugiado iniciar a corrida?

e) O carro A está atravessando sentido oeste a 50km/h e o carro B sentido norte a 60km/h. Ambos estão dirigindo para a intersecção das duas estradas. A que taxa os carros estão se aproximando um do outro quando o carro A está há 3km o e carro B está a 4km da intersecção?

f) A área da superfície de uma esfera está aumentando a uma taxa de $14\pi m^2/h$. Em um certo momento, a área da superfície é $36\pi m^2$. Qual é a taxa de variação do volume da esfera neste instante? Dica: a área da superfície da esfera com raio r é $4\pi r^2$. O volume da esfera com raio r é $\frac{4}{3}\pi r^3$.

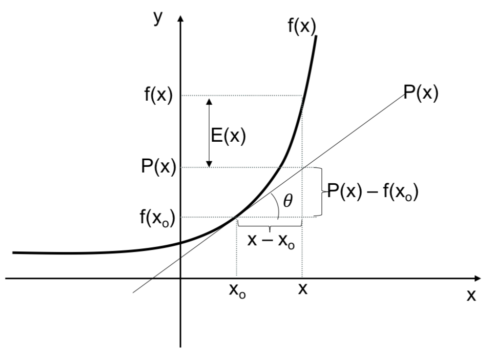
g) (Desafio) Um corredor corre em uma trajetória circular de raio 100 m a uma velocidade constante de 7 m/s. Um outro indivíduo está parado a uma distância de 200 m do centro da pista. Qual a taxa de variação da distância entre os dois quando esta distância era 200 m?

h) (Desafio) Um homem começa a andar para o norte a 4 ft/s de um ponto P. 5 minutos mais tarde uma mulher inicia sua caminhada para o sul a uma velocidade de 5 ft/s partindo de um ponto localizado 500 ft a leste de P. Qual a taxa de afastamento entre o homem e a mulher 15 minutos após a mulher ter iniciado a caminhada?

8 Polinômio de Taylor

Polinômio de Taylor é utilizado quando deseja-se transformar uma **função** $f(x)$ em um polinômio de **grau n** nas proximidades de $x = x_0$. Transformar uma função em um polinômio pode ser interessante, pois polinômios são funções fáceis de manipular.

Vamos supor que queremos saber o valor de $sen(1)$ sem o auxílio da calculadora. Não conseguiríamos, pois, nós sabemos apenas alguns valores notáveis da função $y = sen(x)$, como $sen(\frac{\pi}{2})$, $sen(\frac{\pi}{6})$, etc. Teremos a mesma dificuldade se quiséssemos saber o valor de $ln(5)$. Encontramos essas dificuldades, pois, essas funções não são polinomiais, isto é, da forma $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$. Note que podemos saber o valor de uma função polinomial em qualquer ponto, basta substituirmos o valor de x, o mesmo não ocorre com $sen(x)$, $ln(x)$, e^x. O Polinômio de Taylor surge para vencer essa dificuldade, a de calcular o valor de uma função não polinomial em qualquer ponto. Para isso, transformaremos essas funções em polinômios. Vamos ver como fazer isso.



Considere uma função genérica, não polinomial, como a da figura. Sabemos que a derivada no ponto x_0 é o coeficiente angular da reta tangente neste ponto, portanto:

$$f'(x_0) = \frac{P(x) - f(x_0)}{x - x_0} \tag{26}$$

Onde $P(x)$ é a reta tangente. Se isolarmos $P(x)$ em (27):

$$P(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) \tag{27}$$

E (29) é o Polinômio de Taylor de $f(x)$ de ordem 1 em volta de x_0. É fácil de ver pela figura que o valor de $P(x)$ é muito próximo do valor de $f(x)$ quando x está próximo de x_0, por isso, dissemos "em volta de x_0". Também notamos que $E(x)$ é o erro que estamos cometendo ao aproximar $f(x)$ por $P(x)$ e esse erro diminuí conforme x se aproxima de x_0. Portanto, temos um polinômio, de primeiro grau, que aproxima $f(x)$ quando x está próximo de x_0. É claro que estamos fazendo somente uma aproximação com esse método e, assim, teremos um erro que será tão maior quanto mais nos afastamos de x_0. Se quisermos fazer uma aproximação melhor, deveremos acrescentar um novo termo a esse polinômio:

$$P_2(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 \tag{28}$$

(30) é o polinômio de ordem 2 de $f(x)$ em volta de x_0. Este polinômio é uma aproximação ainda melhor do que o polinômio de ordem 1. Se quisermos refinar mais ainda nossa aproximação, podemos ir acrescentando mais termos seguindo o mesmo padrão:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ... + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n \quad (29)$$

(31) é o Polinômio de Taylor de ordem n de $f(x)$ em torno de x_0 e quanto maior n, isto é, quanto maior o número de termos do polinômio, melhor será a aproximação feita. Os exemplos podem deixar essa idéia mais clara.

EXEMPLO 8.1 Calcule os polinômios de taylor de $f(x) = sen(x)$ de ordens 1, 2, 3, 4 e 5 em volta de $x_0 = 0$. Represente gráficamente e interprete.

Solução: Calculando o Polinômio de Taylor de ordem 1:

$$f'(0) = cos(0) = 1 \; e \; f(0) = sen(0) = 0$$

Substituindo na fórmula do Polinômio de Taylor de ordem 1:

$$P_1(x) = 0 + 1 \times (x - 0) = x$$

Calculando o polinômio de taylor de ordem 2:

$$f''(0) = -sen(0) = 0$$

Portanto, o termo de ordem 2 é nulo e:

$$P_2 = x$$

Para ordem 3:

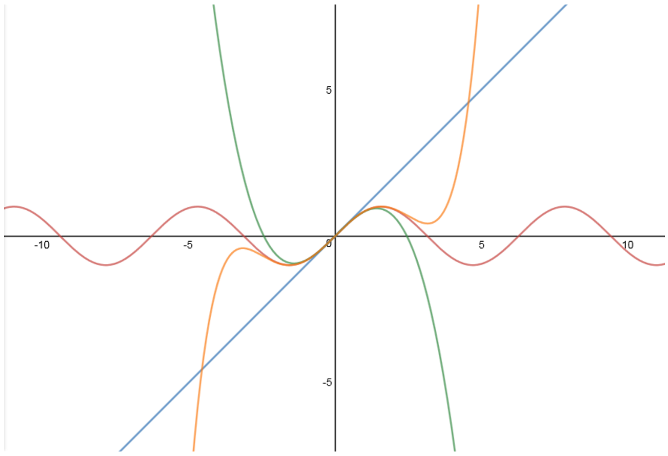
$$f'''(0) = -cos(0) = -1$$

$$P_3(x) = x + \frac{(-1)}{3!} \times (x - 0)^3 = x - \frac{x^3}{3!}$$

O polinômio de ordem 4, assim como o de ordem 2, também será nulo. Para o de ordem 5:

$$f'''''(0) = cos(0) = 1$$

$$P_5(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{1}{5!} \times (x - 0)^5 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$



Plotando o gráfico da função $f(x) = sen(x)$ e de seus Polinômios de Taylor: $P_1 = x$, $P_3 = x - \frac{x^3}{6}$ e $P_5 = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$, notamos que, quanto maior o grau do Polinômio de Taylor, mais parecido é o polinômio com $sen(x)$. É possível observar também que os Polinômios de Taylor passam a não ser uma boa aproximação para pontos distantes de x_0.

EXEMPLO 8.2 Construa o Polinômio de Taylor de ordem n para a função $f(x) = xe^x$ em torno de $x_0 = 0$.

Solução: Primeiro calculemos as derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^x + xe^x \\ f''(x) = e^x + e^x + xe^x &= 2e^x + xe^x \\ f'''(x) &= 3e^x + xe^x \end{aligned}$$

Avaliando em $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} f'(0) &= 1 \\ f''(0) &= 2 \\ f'''(0) &= 3 \\ &. \\ &. \\ &. \\ f^n &= n \end{aligned}$$

Substituindo no Polinômio de Taylor:

$$P_n(x) = x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{3}{3!}x^3 + ... + \frac{n}{n!}x^n$$

$$xe^x \simeq P_n(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + ... + \frac{x^n}{(n-1)!}$$

EXEMPLO 8.3 Calcule um valor aproximado para $ln(1,3)$ utilizando o Polinômio de Taylor de ordem 4.

Solução: Portanto devemos construir o Polinômio de Taylor de $ln(x)$ e avaliá-lo em $x = 1,3$. Note que, neste caso, não sabemos qual x_0 iremos usar. O x_0 que escolheremos será o ponto mais próximo de $x = 1,3$ tal que conhecemos o valor de $ln(x_0)$, pois, precisaremos deste valor para construir o Polinômio de Taylor. Obviamente, neste caso, usaremos $x_0 = 1$, pois sabemos que $ln(1) = 0$. Calculando as derivadas:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{x} \\
f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \\
f'''(x) &= 2\frac{1}{x^3} \\
f''''(x) &= -6\frac{1}{x^4} \\
f'''''(x) &= 24\frac{1}{x^5}
\end{aligned}$$

Avaliando em $x_0 = 1$:

$$\begin{aligned}
f'(1) &= 1 \\
f''(1) &= -1 \\
f'''(1) &= 2 \\
f''''(1) &= -6 \\
f'''''(1) &= 24
\end{aligned}$$

Construindo o polinômio:

$$P_5(x) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \frac{(x-1)^4}{4} + \frac{(x-1)^5}{5}$$

Se substituirmos $x = 1,3$, teremos $P_5(1,3) = 0,262461$. Utilizando uma calculadora temos $ln(1.3) = 0.2623642654$. Vemos que conseguimos uma boa aproximação com o Polinômio de Taylor. Na realidade, a calculadora faz exatamente um Polinômio de Taylor para calcular essas funções e é por isso que esta técnica é tão poderosa, pois, permite calcular essas funções utilizando somente aritmética.

EXEMPLO 8.4 Calcule um valor aproximado para $\sqrt[3]{8,2}$ utilizando um Polinômio de Taylor de ordem 3.

Solução: Novamente temos uma função ($\sqrt[3]{x}$) a qual não conhecemos o seu valor em qualquer ponto e desejamos calcular o seu valor em $x = 8,2$. Primeiro, escolhemos um x_0. Usando o mesmo critério do exemplo anterior, escolhemos $x_0 = 8$, pois, sabemos que $\sqrt[3]{8} = 2$.

Calculando as derivadas:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3}\frac{1}{x^{\frac{2}{3}}} \\ f''(x) &= \frac{-2}{9}x^{-\frac{5}{3}} \\ f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Avaliando em $x_0 = 8$:

$$\begin{aligned} f'(8) &= \frac{1}{3} \times 8^{-\frac{2}{3}} \\ f''(8) &= -\frac{2}{9} \times 8^{-\frac{5}{3}} \\ f'''(8) &= \frac{10}{27} \times 8^{-\frac{8}{3}} \end{aligned}$$

Construindo o polinômio:

$$P_3(x) = 2 + \frac{1}{3} \times 8^{-\frac{2}{3}}(x-8) - \frac{2}{9} \times \frac{1}{2} \times 8^{-\frac{5}{3}}(x-8)^2 + \frac{10}{27} \times \frac{1}{6} \times 8^{-\frac{8}{3}}(x-8)^3$$

Avaliando em $x = 8,2$, encontramos $P_3(8,2) = 2,016400463$. Um valor bem próximo ao encontrado com a calculadora $\sqrt[3]{8,2} = 2,016529675$.

Exercícios 8.1

Utilizando um polinômio de Taylor de ordem 3, calcule:

a) $e^{0,3}$

b) $sin(0,2)$

c) $ln(1,1)$

d) $\sqrt{101}$

e) $(1,1)^{10}$

f) (Desafio) Considere a curva definida por $xy^3 - x^5y^2 = 4$. Calcule y' e encontre o Polinômio de Taylor de grau 1 a esta curva no ponto (1,2).

9 Integrais

9.1 Integral indefinida de uma função

Seja a função $f(x) = x$, perguntamos: Qual é a função cuja derivada é $f(x)$? Se pensarmos um pouco, chegaremos a conclusão que a função que procuramos é $F(x) = \frac{x^2}{2}$. Entretanto, se somarmos qualquer constante à essa função, a derivada da nova função também será $f(x)$, pois, a derivada de uma constante é zero. Portanto, a função $F(x)$ não é única, mas sim define uma família de funções $F(x) = \frac{x^2}{2} + K$ cuja derivada é $f(x)$, onde K é uma constante real.

A função $F(x)$ é chamada de *primitiva* ou *integral indefinida* de $f(x)$ e usamos a notação:

$$\int f(x)dx = F(x)$$

Lê-se "a integral indefinida de $f(x)$ com relação à variável x é igual a $F(x)$". Portanto, a integral é a operação inversa da derivada, ou seja, se derivamos uma função e integramos em seguida, voltamos para a função original.

EXEMPLO 9.1.1 Qual é a integral da função $f(x) = cos(x)$.

Solução: Precisamos encontrar a função cuja derivada é $f(x) = cos(x)$. Nós sabemos que essa função é $sen(x)$. Então,

$$\int cos(x)dx = sen(x) + k$$

9.2 Propriedades da Integral

Sejam f e g integráveis, então:

a)$\int [f(x) + g(x)]dx$=$\int f(x)dx$ + $\int g(x)dx$

"A integral da soma é a soma das integrais"

b)$\int kf(x)dx$=$k \int f(x)dx$, com k constante.

EXEMPLO 9.2.1 Calcule a integral indefinida da função $f(x) = 3x + 1$.

$$\int [3x + 1]dx = \int 3xdx + \int 1dx =$$

$$3 \int xdx + \int 1dx = 3\frac{x^2}{2} + x + k$$

Derive a integral que obtivemos e veja que sua derivada é $f(x)$.

9.3 Aglumas integrais Indefinidas

Existem algumas integrais indefinidas que devemos saber de cor para resolver outras mais complicadas. Nesta seção vamos listar essas integrais, conhecidas como "integrais imediatas". Você mesmo pode verificar que essas igualdades são verdadeiras derivando as integrais e obtendo a função que está sendo integrada.

Integral indefinida de um monômio: Seja uma função monomial $f(x) = x^n$ e n um número real diferente de -1, então, sua integral indefinida será:

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k$$

Integral da exponencial:

$$\int e^x dx = e^x + k$$

Integral de $\frac{1}{x}$:

$$\int \frac{1}{x} dx = ln|x| + k$$

Integrais trigonométricas:

$$\int cos(x) dx = sen(x) + k$$

$$\int sen(x) dx = -cos(x) + k$$

$$\int sec^2 x dx = tgx + k$$

$$\int tg(x) dx = -ln|cos(x)| + k$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctg(x) + k$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = arcsen(x) + k$$

9.4 Integrais por substituição.

A técnica de integração por substituição funciona quando tivermos que integrar funções do tipo:

$$\int f(g(x))g'(x)dx$$

Ou seja, quando no integrando temos uma função composta multiplicada pela derivada da função que está "dentro". Integraremos essa função fazendo a seguinte substituição de variáveis:

$$\begin{aligned} u &= g(x) \\ \frac{du}{dx} &= g'(x) \\ du &= g'(x)dx \end{aligned}$$

Se fizermos estas substituições na integral original:

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u) + k$$

Essa técnica pode ficar mais clara com os exemplos a seguir.

EXEMPLO 9.4.1 Calcule $\int xcos(x^2)dx$.

Notamos que $f(g(x)) = cos(g(x))$ e $g(x) = x^2$. Fazendo a substituição de variáveis:

$$u = g(x)$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = 2x \;\rightarrow\; du = 2xdx \;\rightarrow\; \frac{du}{2} = xdx$$

Fazendo as substituições:

$$\int xcos(x^2)dx = \int cos(u)\frac{du}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int cos(u)du = \frac{1}{2}(sen(u) + k)$$

Voltando à variável original:

$$\int xcos(x^2)dx = \frac{1}{2}(sen(x^2) + k)$$

Quando usamos esta técnica para resolver uma integral, teremos que escolher o que chamar de $u = g(x)$. A intuição para fazer a escolha certa é procurar a derivada de $g(x)$ multiplicando dx a menos de constantes, como aconteceu neste exemplo. A derivada que procurávamos multiplicando dx era $2x$, mas só tínhamos xdx, por esse motivo, o fator $\frac{1}{2}$ apareceu na função integrada, pois, $xdx = \frac{1}{2}2xdx$ e, deste modo, obtivemos $\frac{1}{2}g'(x)dx = \frac{1}{2}2xdx$.

EXEMPLO 9.4.2 Calcule $\int x\sqrt{x^2+1}dx$.

O que chamar de $u = g(x)$? Seja lá o que chamemos de $g(x)$, temos que encontrar $g'(x)$ multiplicando dx. Notamos que, se $g(x) = x^2 + 1$, então, $g'(x) = 2x$ e no integrando nós temos $xdx = \frac{1}{2}2xdx$.

$$u = g(x) = x^2 + 1$$

$$\frac{du}{dx} = g'(x) = 2x \ \rightarrow \ du = 2xdx \ \rightarrow \ \frac{du}{2} = xdx$$

Substituindo na integral original:

$$\int \sqrt{u}\frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}du = \frac{1}{2}\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}} + k$$

Voltando á variável original:

$$\frac{1}{3}(x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$$

EXEMPLO 9.4.3 Calcule $\int x^2 e^{x^3}dx$.

$$u = g(x) = x^3 \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = 3x^2$$

$$\frac{du}{dx} = 3x^2 \ \rightarrow \ \frac{du}{3} = x^2dx$$

Substituindo na integral original:

$$\int x^2 e^{x^3}dx = \int e^u \frac{du}{3} = \frac{1}{3}\int e^u du = \frac{1}{3}e^u + k$$

Voltando à variável original:

$$\int x^2 e^{x^3}dx = \frac{1}{3}e^{x^3} + k$$

EXEMPLO 9.4.4 Calcule $\int \frac{ln(x)}{x}dx$.

$$u = g(x) = ln(x) \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \ \rightarrow \ du = \frac{dx}{x}$$

Fazendo as substituições na integral original:

$$\int \frac{ln(x)}{x}dx = \int udu = \frac{u^2}{2} + k$$

Voltando à variável original:

$$\int \frac{ln(x)}{x}dx = \frac{ln(x)^2}{2} + k$$

EXEMPLO 9.4.5 Calcule $\int \frac{sen(x)cos(x)}{\sqrt{sen^2(x)+2}}dx$.

Antes de ver a resolução, tente você mesmo encontrar qual função deve ser substituída.

$$u = g(x) = sen^2(x) + 2 \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = 2sen(x)cos(x) \ \rightarrow \ \frac{du}{2} = sen(x)cos(x)$$

Fazendo a substituição na integral original:

$$\int \frac{sen(x)cos(x)}{\sqrt{sen^2(x)+2}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \frac{1}{2}\int u^{-\frac{1}{2}}du =$$

$$= u^{\frac{1}{2}} + k = \sqrt{sin^2x + 2} + k$$

Voltando à variável original:

$$= -(sen^2(x) + 2)^{-\frac{1}{2}} + k$$

EXEMPLO 9.4.6 Calcule $\int \frac{sen(x)}{cos^5(x)}dx$.

$$u = cos(x) \ \rightarrow \ \frac{du}{dx} = -sen(x) \ \rightarrow \ -du = sen(x)dx$$

$$\int \frac{sen(x)}{cos^5(x)}dx = \int \frac{-du}{u^5} = \frac{1}{4u^4} + k =$$

$$= \frac{1}{4cos^4(x)} + k$$

Exercícios 9.4.1

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int senx.cosxdx$

b) $\int senx\sqrt{cosx}dx$

c) $\int tanxdx$

d) $\int (senx)^2.cosxdx$

e) $\int e^{-x}dx$

f) $\int \frac{1}{(3x-1)^2}dx$

g) $\int \frac{e^x}{1+e^x}dx$

h) $\int \frac{1}{x\sqrt{lnx}}dx$

i) $\int \frac{x^2}{\sqrt[5]{(x^3+5)^2}}dx$

j) $\int \frac{sen(lnx)}{x}dx$

k) $\int \frac{sen(\sqrt[5]{x^4})}{\sqrt[5]{x}}$

l) $\int \frac{2x-4}{x^2-4x+3}dx$

m) $\int cos^3 x dx$

n) (Desafio) $\int x^3\sqrt{1+x^2}dx$

9.5 Integrais indefinidas por Partes.

Nesta seção vamos aprender mais uma técnica de integração, conhecida como integração por partes.

Sabemos da regra do produto que:

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\Leftrightarrow f(x)g'(x) = [f(x)g(x)]' - f'(x)g(x) \tag{30}$$

Se integrarmos ambos os lados da igualdade acima:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \tag{31}$$

A equação acima é conhecida como fórmula da integral por partes. Esta é a fórmula que usaremos para integrar algumas funções.

Uma outra forma da fórmula da integral por partes pode ser obtida fazendo-se a seguintes substituição de variáveis:

$$f(x) = u \;\; e \;\; g'(x)dx = dv \tag{32}$$

E a fórmula fica:

$$\int udv = uv - \int vdu \tag{33}$$

Desta forma, para resolver integrais por partes, devemos seguir os seguintes quatro passos: (1) nomear u e dv;(2) derivar u, obtendo du; (3) integrar dv, obtendo v e (4) substituir na equação: $\int udv = uv - \int vdu$.

Umas das perguntas principais perguntas a serem feitas ao utilizar o métdo de integração por partes é: O que chamar de u e quem chamar de dv?

Uma sugestão que funciona em boa parte dos casos (**atenção, isto não é uma regra**) é utilizar o diagrama "LIATE"para tomar a decisão. "LIATE"é um acróstico para os tipos de função: "Logarítmicas", "Inversas de trigonométricas", "Algébricas", "Trigonométricas"e "Exponenciais". Deve-se escolher como u a função que estiver mais próxima de "L"e como dv a função mais próxima de "E".

EXEMPLO 9.5.1 Calcule $\int xcos(x)dx$.

Solução: Nesta integral, não conseguiremos uma substituição de variáveis que resolva o nosso problema. Teremos que usar a fórmula da integral por partes.

Para resolver integrais com essa técnica devemos nos perguntar: O que chamar de u e quem chamar de dv?

Para tomar a decisão correta devemos lembrar que temos que derivar u e integrar dv. A integral que queremos calcular é composta pelos termos $cosx$ e x. Tanto a integral quanto a derivada de $cosx$ ficam na forma $(+ou-)senx$. Desta forma, somos indiferentes entre a posição de $cosx$. Já a função x possui 1 como derivada e $\frac{x^2}{2}$ de integral. Desta forma, parece mais simples optar pela escolha de derivar x, por isso a primeira escolha é:

$$u = x \quad e \quad dv = cos(x)dx$$

Se utilizarmos o diagrama "LIATE"tomaríamos a mesma escolha, pois x é uma função "Algébrica"e $cosx$ é uma função Trigonométrica. Como "A"está mais próximo de "L", devemos chamar x de u. Agora vamos derivar u para obter du e integrar dv para obter v:

$$du = 1dx \quad e \quad v = sen(x)$$

Substituindo na fórmula da integral por partes:

$$\int xcos(x)dx = xsen(x) - \int 1sen(x)dx \tag{34}$$

Note que agora temos uma integral que sabemos resolver (nem sempre isto acontece e, algumas vezes temos que repetir o processo). Desta forma a solução será:

$$\int xcos(x)dx = xsen(x) + cos(x) + k$$

EXEMPLO 9.5.2 Calcule $\int ln(x)dx$.

Este é um exemplo clássico em que iremos apresentar um outro "truque"para resolver uma integral por partes. Primeiro, notamos que só temos uma função no integrando e não temos o que chamar de u e o que chamar de dv. Entretanto, notamos também que $ln(x) = 1 \times ln(x)$. Deste modo, temos duas funções no integrando e, assim, podemos integrar por partes:

$$u = ln(x) \quad e \quad dv = 1dx$$

Neste caso, a escolha é óbvia, já que não sabemos a integral de $ln(x)$.

$$du = \frac{1}{x}dx \quad e \quad v = x$$

Substituindo na fórmula da integral por partes:

$$\int ln(x)dx = xln(x) - \int x\frac{1}{x}dx = xln(x) - \int 1dx$$

$$\int ln(x) = xln(x) - x + k = x(ln(x) - 1) + k$$

EXEMPLO 9.5.3 Calcule $\int e^x cos(x)dx$.

Este é um outro exemplo clássico de integral por partes. Notamos que no integrando temos duas funções, as quais, se fizermos derivadas sucessivas, obteremos uma periodicidade. A maneira de resolver integrais desse tipo é a seguinte:

$$e^x dx = dv \quad e \quad cos(x) = u$$

Aqui pouco importa a escolha que fazemos.

$$v = e^x \quad e \quad du = -sen(x)dx$$

Substituindo na fórmula da integral por partes:

$$\int e^x cos(x)dx = e^x cos(x) + \int e^x sen(x)dx \tag{35}$$

No segundo termo do lado direito de (35) obtemos uma integral similar ao que tínhamos antes. Para resolver o problema, integramos da mesma maneira este segundo termo:

$$e^x dx = dv \quad e \quad sen(x) = u$$

$$v = e^x \quad e \quad du = cos(x)dx$$

$$\int e^x sen(x)dx = e^x sen(x) - \int e^x cos(x)dx$$

Substituindo na integral (36):

$$\int e^x cos(x)dx = e^x cos(x) + (e^x - \int e^x cos(x)dx)$$

Agora reparamos que a integral que desejamos calcular aparece em ambos os lados da igualdade. Basta isolar a integral e resolvemos o problema:

$$2\int e^x cos(x)dx = e^x(cos(x)+1)+k$$

$$\Rightarrow \int e^x cos(x)dx = \frac{e^x(cos(x)+1)}{2}+c$$

EXEMPLO 9.5.4 Calcule $\int cos^2(x)dx$.

Notamos que $cos^2(x) = cos(x)cos(x)$ e integramos por partes:

$$cos(x)dx = dv \ \ e \ \ cos(x) = u$$

$$v = sen(x) \ \ e \ \ du = -sen(x)dx$$

Substituindo na fórmula da integral por partes:

$$\int cos^2(x)dx = \int cos(x)cos(x)dx = sen(x)cos(x) + \int sen^2(x)dx$$

Lembrando da relação fundamental da trigonometria($cos^2(x) + sen^2(x) = 1$):

$$\int cos^2(x)dx = sen(x)cos(x) + \int (1-cos^2(x))dx = sen(x)cos(x) + \int 1dx - \int cos^2(x)dx$$

E então, novamente, notamos que a integral que queremos calcular aparece em ambos os lados da igualdade e, portanto, podemos isolá-la:

$$2\int cos^2(x)dx = sen(x)cos(x) + x + k$$

$$\int cos^2(x)dx = \frac{sen(x)cos(x)+x}{2}+c$$

EXEMPLO 9.5.5 Calcule $\int (ln(x))^2dx$.

Neste caso temos duas opções, fazer como no exemplo anterior $(ln(x))^2 = ln(x)ln(x)$ ou notar que $(ln(x))^2 = 1 \times (ln(x))^2$. Usaremos a segunda opção, pois, com ela não precisamos saber a integral de $ln(x)$ de antemão.

$$\int (ln(x))^2dx = \int 1 \times (ln(x))^2dx$$

$$dv = 1dx \quad e \quad u = ln^2(x)$$

$$v = x \quad e \quad du = 2ln(x)\frac{1}{x}dx$$

Substituindo na fórmula da integral por partes:

$$\int 1 \times (ln(x))^2 dx = xln^2(x) - \int x2ln(x)\frac{1}{x}dx$$

Assim, O problema se reduz a calcular a integral de $ln(x)$, o que já foi feito no exemplo 9.5.2.

$$\int ln^2(x)dx = xln^2(x) - 2[x(ln(x) + 1)] + c$$

EXEMPLO 9.5.6 Calcule $\int arcsen(x)dx$.

Neste exemplo usaremos as duas técnicas juntas, por partes e por substituição. Primeiro, notamos que $\int arcsen(x)dx = \int 1 \times arcsen(x)dx$.

$$dv = 1dx \quad e \quad u = arcsen(x)dx$$

$$v = x \quad e \quad du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Substituindo na fórmula da integral por partes:

$$\int arcsen(x)dx = x\ arcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{36}$$

Resolveremos a integral que obtemos no segundo termo do lado direito de (36) por substituição:

$$\alpha = 1 - x^2 \;\rightarrow\; \frac{d\alpha}{dx} = -2x \;\rightarrow\; -\frac{d\alpha}{2} = xdx$$

Substituindo:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{\alpha}}d\alpha = -\alpha^{\frac{1}{2}} = -(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$$

Substituindo em (36):

$$\int arcsen(x)dx = x\ arcsen(x) + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + k$$

Exercícios 9.5.1

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int xsenxdx$

b) $\int x^2lnxdx$

c) $\int x(lnx)^2dx$

d) $\int \frac{x^3-5x^2+3-x^5ln(x)}{x}dx$

e) $\int e^{-x} sen(x)dx$

f) $\int sen(lnx)dx$

g) $\int x^3 cos(x^2)dx$

h) $\int x^3 e^{x^2} dx$

9.6 Integração por frações parciais

Nesta seção aprenderemos a resolver integrais indefinidas do tipo$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$, onde $p(x)$ e $Q(x)$ são polinômios e o grau de $Q(x)$ é maior do que o grau de $P(x)$.

Vamos considerar uma integral deste tipo, no caso em que n=1:

$$\int \frac{mx+n}{x^2 - xx_0 - xx_1 + x_0x_1}dx \tag{37}$$

Para resolver integrais deste tipo vamos seguir os seguintes passos:

Passo 1. Garantir que o grau do denominador é de fato maior do que o grau do numerador. No exemplo que queremos resolver isto é verdade, mas caso não fosse, seria necessário operar uma divisão de polinômios.

Passo 2. Fatorar ao máximo o denominador, deixando-o na forma $(x - x_0)^n(x - x_1)^m(x - x_2)^k$.... No exemplo, podemos fatorar o denominador da seguinte forma:

$$x^2 - xx_0 - xx_1 + x_0x_1 = (x - x_0)(x - x_1) \tag{38}$$

Passo 3. Separar a fração isolando cada um dos termos no denominador e colocando A, B, C... no numerador:

$$\frac{mx+n}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_1)}$$

Onde A e B são constantes que temos que determinar.

Nota: Para o caso em que um dos fatores do denominador tem potência maior do que 1, procedemos da seguinte maneira no momento de separar as frações (com potência 3, por exemplo):

$$\frac{mx+n}{(x-x_0)(x-x_1)^3} = \frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_1)} + \frac{C}{(x-x_1)^2} + \frac{D}{(x-x_1)^3}$$

Passo 4. Juntar novamente o denominador realizando o MMC:

$$\frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_1)} = \frac{A(x-x_1) + B(x-x_0)}{(x-x_0)(x-x_1)} \tag{39}$$

Fazendo a distributiva e juntando os termos semelhantes:

$$\frac{x(A+B) - Ax_1 - Bx_0}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

Passo 5. Resolver o sistema:

$$\frac{mx+n}{(x-x_0)(x-x_1)} = \frac{x(A+B) - Ax_1 - Bx_0}{(x-x_0)(x-x_1)}$$

Resolvendo o sistema (multiplicando a primeira equação por x_0 e somando com a de baixo):

$$\begin{aligned} A + B &= m \\ -Ax_1 - Bx_0 &= n \end{aligned}$$

$$A(x_0 - x_1) = mx_0 + n \ \rightarrow \ A = \frac{mx_0 + n}{x_0 - x_1}$$

$$B = -\frac{x_1 m + n}{x_0 - x_1}$$

Passo 6. Resolver a integral:

Agora que temos as constantes A e B, basta resolvermos a integral

$$\int \frac{A}{(x-x_0)} + \frac{B}{(x-x_1)} dx = Aln|x-x_0| + Bln|x-x_1| + k$$

EXEMPLO 9.6.1 Calcule $\int \frac{3x+2}{x^2-3x+2} dx$.

Como o grau do denominador é maior do que o grau do numerador, podemos passar direto para o Passo 2, fatorando o denominador.

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

Assim, podemos reescrever a integral original:

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(x-2)} dx$$

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{(x-1)} + \frac{B}{(x-2)}$$

Colocando no mesmo denominador:

$$\frac{3x+2}{(x-1)(x-2)} = \frac{A(x-2)+B(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \frac{(A+B)x-2A-B}{(x-1)(x-2)}$$

Resolvendo o sistema:

$$\begin{aligned} A+B &= 3 \\ -2A-B &= 2 \end{aligned}$$

Somando as duas equações obtemos:

$$A = -5 \ e \ B = 8$$

Portanto:

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(x-2)}dx = \int \frac{-5}{(x-1)}dx + \int \frac{8}{(x-2)}dx$$

$$\int \frac{3x+2}{(x-1)(x-2)}dx = -5 \ ln|x-1| + 8 \ ln|x-2| + k$$

Exercícios 9.6.1

Calcule as seguintes integrais indefinidas:

a) $\int \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}dx$. Note que, nesta integral, não temos o grau do numerador menor do que o grau do denominador e, portanto, antes de seguir os passos para resolver a integral deve-se efetuar uma divisão se polinômios.

b) $\int \frac{x}{x^2-4}dx$

c) $\int \frac{x^2+1}{(x-2)^3} dx$

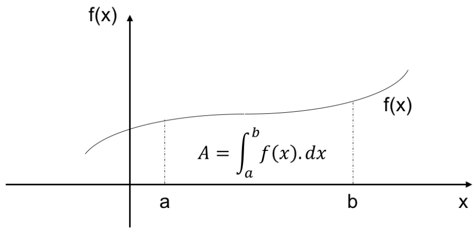
d) $\int \frac{x^3+x+1}{x^2-2x+1} dx$

9.7 Integrais definidas: Áreas sob curvas

Até agora calculamos somente integrais indefinidas, nosso objetivo agora é apresentar uma fórmula para calcularmos uma integral definida e dar um significado geométrico para essas integrais. Uma integral definida difere da integral indefinida por ter extremos (ou limites) de integração:

$$\int_a^b f(x)dx \tag{40}$$

O que significa que faremos a integração da abscissa a até a abscissa b. A integral definida tem um significado geométrico: É numericamente igual à área sob a curva de $f(x)$ e entre as retas $x = a$ e $x = b$, como mostra a figura:



Calculamos uma integral definida utilizando o primeiro teorema fundamental do cálculo:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{41}$$

Um detalhe sobre esse cálculo de áreas é que a área abaixo do eixo x entra na conta com o sinal negativo. Por exemplo, se calcularmos a área abaixo do gráfico da função $f(x) = 2x - 1$ entre as abscissas $x = 0$ e $x = 1$, o resultado será zero, pois, temos a mesma área abaixo e acima do eixo x e, como a área abaixo do eixo x entra na conta com o sinal negativo, essas áreas se cancelam.

EXEMPLO 9.7.1 Calcule a área sob a curva $y = x^2$ e entre as retas $x = 0$ e $x = 4$.

A área é numericamente igual a integral definida de $f(x)$ entre as abscissas $x = 0$ e $x = 4$. Utilizando o teorema fundamental do cálculo:

$$\int_0^4 x^2 dx = \frac{4^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{64}{3}$$

Pois $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Note que para calcular uma integral definida não utilizamos a constante de integração.

EXEMPLO 9.7.2 Calcule a área compreendida entre a função $f(x) = x^3 - x$ e à reta tangente ao seu gráfico no ponto de abscissa $x_0 = 1$.

Vamos encontrar a equação da reta tangente ao gráfico da $f(x)$ no ponto de abscissa $x_0 = 1$:

$$t(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 2x - 2$$

Agora, vamos encontrar os pontos nos quais a reta tangente cruza $f(x)$:

$$f(x) = t(x) \;\Leftrightarrow\; x^3 - x = 2x - 2 \;\Leftrightarrow\; x^3 - 3x + 2 = 0$$

Portanto, os valores de x que satisfazem esta equação são as abscissas dos pontos onde a reta tangente cruza, ou tangência $f(x)$. Como sabemos que $x = 1$ é um desses pontos, então, $x = 1$ é raiz do polinômio do terceiro grau no lado esquerdo da igualdade e, portanto, podemos fatorá-lo:

$$x^3 - 3x + 2 = (x - 1)(x^2 + x - 2)$$

Portanto, as raízes de $x^2 + x - 2$ nos dão os outros pontos onde os dois gráficos se cruzam. Se resolvermos essa equação chegaremos em $x = 1$ ou $x = -2$. Agora sabemos que, além do ponto de tangência, os dois gráficos se cruzam em $x = -2$ e agora podemos esboçar o gráfico com a reta tangente:

Agora sabemos os extremos de integração, são de $x = -2$ até $x = 1$. Para calcular a área sempre procederemos da mesma maneira: Faremos a integral da função que está em cima, menos a função que está embaixo. Para encontrar qual função está por cima no intervalo $[-2, 1]$, basta escolher qualquer valor dentro deste intervalo e verificar quem é maior, por exemplo, $f(0) = 0$ e $t(0) = -2$, portanto, a função está por cima da reta tangente neste intervalo.

$$A = \int_{-2}^{1} [x^3 - x - (2x - 2)]dx = \int_{-2}^{1} x^3 dx - \int_{-2}^{1} x dx - 2\int_{-2}^{1} x dx + 2\int_{-2}^{1} dx$$

$$\Rightarrow A = (\frac{1}{4} - 4) - (\frac{1}{2} - 2) - (1 - 4) + 2(1 + 2) = \frac{27}{4}$$

Exercícios 9.7.1

a) Calcule a área da região limitada pelas retas $x = 0$, $x = 1$, $y = 2$ e pelo gráfico de $y = x^2$.

b) Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que$\sqrt{x} \geq y \geq x^2$.

c) Calcule a área da região compreendida entre os gráficos de $y = x$ e $y = x^2$, com $2 \geq x \geq 0$

d) Calcule a área da região delimitada pelas retas $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$ e pelo gráfico de $y = cosx$.

e) Calcule a área da região delimitada entre a função $f(x) = x^3 + 1$ e sua reta tangente em $x_0 = -1$. Faça o desenho da região.

f) A área administrativa de uma prefeitura precisa fazer o cálculo do IPTU de um terreno de área R limitado pelos gráficos das funções $f(x) = x^2 - 2x - 1$ e $g(x) = -e^x - 1$ e pelas retas verticais $x = -1$ e $x = 1$. Usando técnicas de integral definida calcule a área do terreno R.

g) A taxa de variação do valor de revenda de um veículo após t anos é dada pela seguinte função $V'(t) = -220t + 110$. Sabendo que o veículo novo custa R$12.000, determine o valor de revenda do veículo10 anos após a compra.

h) A população de uma cidade cresce em função dos anos a uma taxa dada por $P'(t) = 0,005t - 9,55$ entre os anos 1970 e 1990 (em milhões de habitantes por ano). Calcule a variação da quantidade de habitantes entre 1970 e 1990.

i) A taxa de variação do número médio de pessoas por hora presentes no shopping da cidade de Anápolis–GO é dada por $C'(t) = 27t^2 - 2t$, com $(0 \leq t \leq 12)$, em que $t = 0$ corresponde às 6:00h e $t = 12$ corresponde às 18:00h. Sabendo que geralmente o shopping possui cerca de 168 pessoas às 8:00h, encontre a quantidade média de clientes no shopping ao meio dia.

j) A taxa de variação do consumo de petróleo $C'(t)$ e a taxa de produção de petróleo $P'(t)$ dos EUA nos anos 80 (em bilhões de barris por ano) são, respectivamente:

$$C'(t) = 27,08.e^{\frac{t}{25}}$$
$$P'(t) = ln(10t) + 25$$

onde t é o número de anos após 01/01/1980. Sabendo que os EUA importaram todo seu déficit de produção de petróleo, determine quantos barris de petróleo os EUA tiveram de importar de 01/01/1980 até 01/01/1990.

Exercício 9.7.2

Um pequeno supermercado contratou um administrador para analisar as vendas de ovos de chocolate durante o período de páscoa. Após uma primeira análise, o administrador modelou a curva de vendas, em centenas de reais, em função do tempo $V(t)$, onde t está em dias e $t = 0$ equivale ao dia 12/04. No ano em que a modelagem foi feita, o domingo de Páscoa foi no dia 16/04.

$$V(t) = 200\frac{t}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{18}} + 20$$

i) Determine as vendas quando t=0. O que isto significa?

ii) Determine o ponto de máximo de $V(t)$. O que este ponto significa?

iii) Determine a integral indefinida de $V(t)$.

iv) Sabendo que a integral de $V(t)$ vale 0 quando $t = 0$, determine o valor da constante de integração.

v) Calcule o valor da integral de $V(t)$ entre os pontos $t = 0$ e $t = 4$. Qual o significado deste resultado? Para este último item, se necessário, utilize as seguintes aproximações: $\sqrt{2\pi} = 2,5$ e $e^{(-16/18)} = 0,4$.

Nota: Para tornar o exercício mais visual, é recomendado que você plote o gráfico de $V(t)$ com o auxílio de um computador.

9.8 Integrais Impróprias

Como fazer se quisermos calcular a área abaixo da curva $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \geq 1$? Neste caso temos que resolver uma integral imprópria.

Uma integral definida, digamos $\int_a^b f(x)dx$, é chamada de imprópria quando:

1. a ou b forem $+\infty$ ou $-\infty$ infinito, ou seja, $\int_a^\infty f(x)dx$ ou $\int_{-\infty}^b f(x)dx$. Ou mais formalmente $\lim_{b\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$ e $\lim_{a\to\infty-\infty} \int_{-\infty}^b f(x)dx$

2. a $f(x)$ possui uma descontinuidade no intervalo $[a, b]$.

Para resolver uma integral imprópria, devemos utilizar um limite. Se o resultado do limite é um número finito, dizemos que a integral **converge**, caso contrário a integral **diverge**.

EXEMPLO 9.8.1 Calcule a área sob a curva $f(x) = \frac{1}{x^2}$ para $x \geq 1$.

Para calcular esta área, temos que resolver a seguinte integral imprópria:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x^2} dx$$

Vamos resolver a integral da mesma forma que resolvemos as integrais definidas:

$$\lim_{t\to\infty} (-\frac{1}{t} + \frac{1}{1}) = 1$$

Desta forma, a área vale 1u.a. e a integral imprópria converge.

EXEMPLO 9.8.2 Calcule a área sob a curva $f(x) = \frac{1}{x}$ para $x \geq 1$.

Para calcular esta área, temos que resolver a seguinte integral imprópria:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x} dx$$

Vamos resolver a integral da mesma forma que resolvemos as integrais definidas:

$$\lim_{t\to\infty} (ln|t| - ln|1|) = \infty$$

Desta forma, a integral imprópria diverge.

Exercícios 9.8.1

a) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$

b) $\int_5^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x-1}}$

c) $\int_1^{\infty} ln(x)dx$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|}dx$

e) $\int_{\infty}^{\infty} xe^{-x^2}dx$

f) (Desafio) $\int_{\infty}^{\infty} xcosh(x)dx$. Dica: $cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $senh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $cosh'(x) = senh(x)$ e $senh'(x) = cosh(x)$. Você também pode usar o fato de que $cosh(x)$ é uma função par.

10 Respostas dos exercícios

Exercícios 1.2.1

a) 1 b)$3p^2$ c) -2 d) np^{n-1} e) 1/2 f)$\sqrt{\frac{1}{3}}$ g) $1/n$ h)$\sqrt{2}$

Exercícios 1.3.1

a) $\frac{1}{3}$ b) 0 c) 0 d) 1 e) -2

Exercícios 1.4.1

a) $-\infty$ b) $+\infty$ c) $+\infty$ d) -1 e) Não existe

Exercícios 1.5.1

a) Assíntota horizontal: $y = 0$. Não há assíntota vertical.
b) Assíntota horizontal: $y = 3$. Assíntotas verticais: $x = 0$ e $x = 2$.
c) Assíntotas horizontais: $y = 4$ e $y = -4$. Assíntotas verticais: $x = \sqrt{2}$ e $x = -\sqrt{2}$.
d) Assíntotas horizontais: $y = -\frac{\sqrt{2}}{3}$ e $y = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Assíntota vertica: $x = \frac{5}{3}$.
e) Assíntota horizontal: $y = 0$. Assíntota vertical: $x = -1$.

Exercícios 1.6.1

a) 0 b) -2 c) $\frac{1}{2p}$ d) 0 e) 1

Exercícios 1.7.1

a) e^2 b) $ln(a)$ c)e^2 d) 0 e)$ln(3)/20$

Exercícios 1.8.1

a)$\sqrt{2}$ b) F(r) é contínua.

Exercícios 2.3.1

a)$\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$ b)$-\frac{1}{4}$ c)$-\frac{n}{X_0{}^(n-1)}$ d) $\frac{1}{x_0}$ f) e^{x_0}

Exercícios 2.4.1

a) Não, a função não é contínua em $x_0 = 2$ e, portanto, não é diferenciável.
b)f é contínua em $x_0 = 3$, mas não é diferenciável, pois, limite $\lim_{x\to 3} \frac{f(x)-f(3)}{x-3}$ não existe.
c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ se x > 4 e $f'(x) = 1$ se x <4. $f'(4)$ não existe, pois a $f(x)$ não é diferenciável em $x_0 = 4$.
d) Toda função diferenciável é contínua, mas nem toda função contínua é diferenciável. Contra exemplo: função módulo de x.

Exercícios 2.8.1

a)$f'(x) = \frac{2x^3+3x^2}{(x+1)^2}$ b) $f'(x) = e^x(cos(x) + sen(x))$
c)$f'(x) = \frac{2-x}{x^3}$ d)$f'(x) = \frac{cos(x)-ln(x)(xsen(x)+2cos(x))}{x^3}$

Exercícios 2.10.1

a)$f'(x) = -sen(x)e^{cos(x)}$ b)$f'(x) = \frac{x^2+3}{x(x^2+1)}$
c)$f'(x) = e^{cos(x)}(cos(x) - sin^2(x))$ d)$f'(x) = \frac{-4}{(x^2-4)^{\frac{3}{2}}}$ e)$f'(x) = \frac{xcos(x)-sen(x)(1-x^2)}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$
f)$f'(x) = (2.x.ln(x) + x).xx^2$ g)$f'(x) = (e^x + 3x)\frac{1}{x}.[-\frac{1}{x^2}.ln(e^x + 3x) + \frac{e^x+3}{x.(e^x+3x)}$

Exercícios 2.11.1

a) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y^2}{2xy+2}$ b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{y+e^y}{xe^y+x}$ c)$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{5-seny-x}$ d) $\frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{x^2+y^2+2y}$

Exercícios 2.11.2

1) a) 1 b) $y - 1 = -\frac{3}{7}(x - 1)$

2) $y = \frac{1}{5}(x + 3)$ 3) $y'(x) = \frac{\alpha x}{\beta(y(x)-\gamma)}$

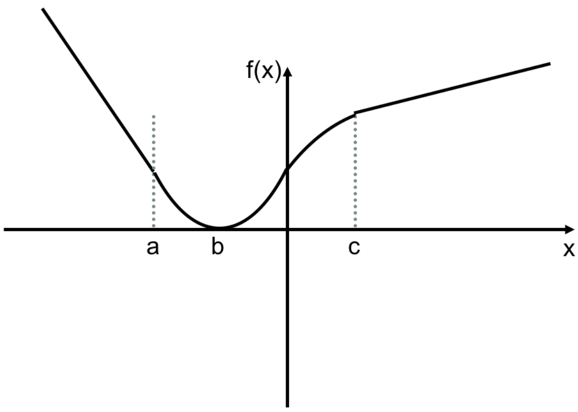
Exercícios 2.12.1

a) $dy = (2x + 3)dx$ e $(dx)^2$ b)$dV = 4\pi r^2 dr$

Exercícios 2.13.1

a)$+\infty$ b) 0 c) 1 d)$+\infty$ e) 0

Exercícios 2.14.1

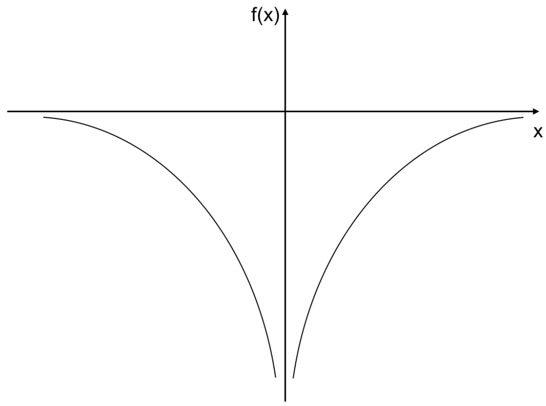


Exercícios 3.1

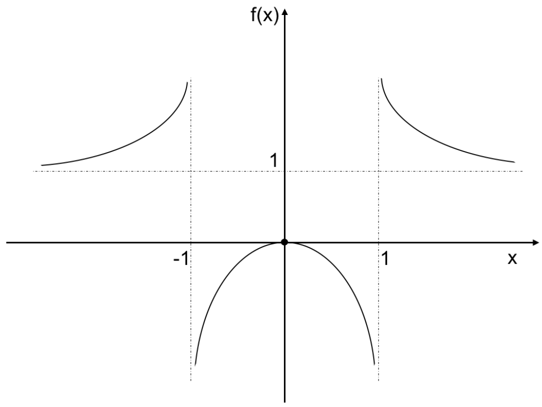
a) $y = 3x - 3$ b) $y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{16}$ c) $y = 15x - 10$ d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ e $(a, b) = (1, 1)$
e) $y = 6x - 2$ ou $y = 6x + 2$ f) $y = 2x - \frac{25}{4}$ g) y=x
h) Prova de que a área é 2. Dica: Como não sabemos o ponto de tangência, chame-o de $(x_0, \frac{1}{x_0})$. O coeficiente angular da reta tangente será $m = f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Desta forma, a reta será: $y - \frac{1}{x_0} = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0)$. Por fim, identifique os pontos onde a reta tangente cruza os eixos ordenados para calcular a área do triângulo retângulo.

Exercícios 4.6.1

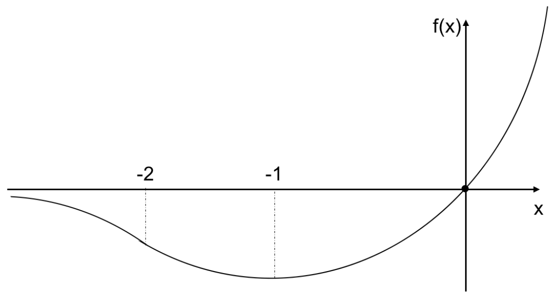
a)



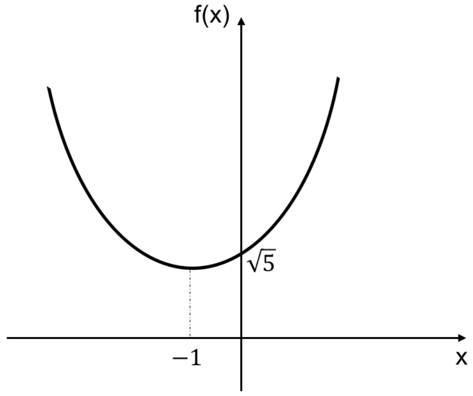
b)



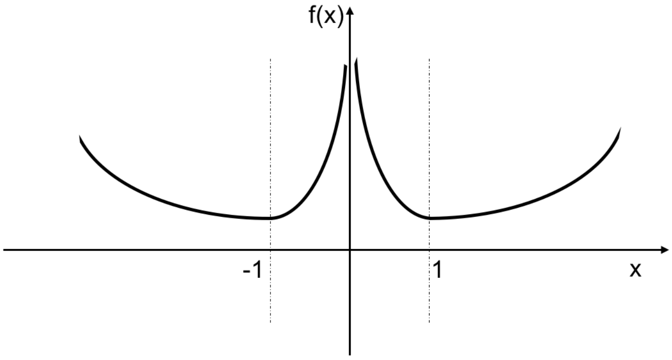
c)



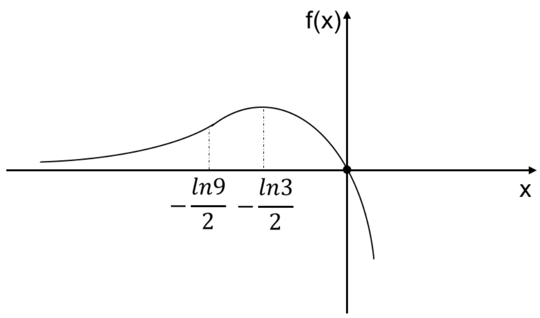
d)



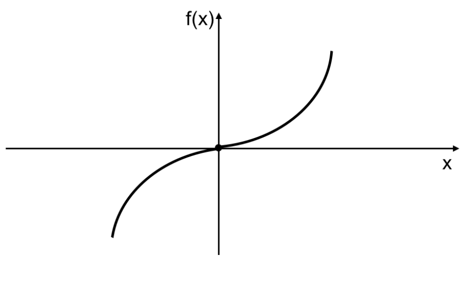
e)



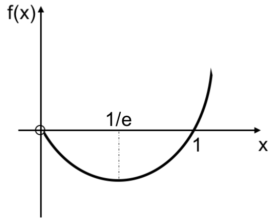
f)



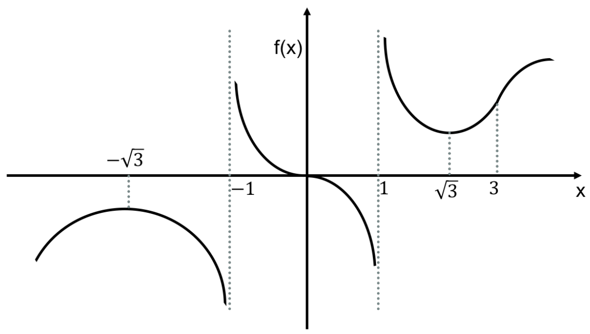
g)



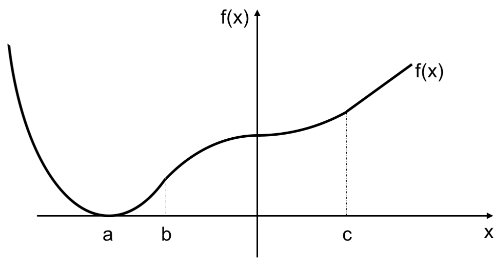
h)



i)



Exercícios 4.6.2



Exercícios 5.1

a) Dimensões do terreno: $600m$ por $1.200m$ b) Raio da base $\sqrt[3]{\frac{1}{3\pi}}$ e altura $\sqrt[3]{\frac{9}{\pi}}$ c) $q = 50$ unidades. d) $(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ ou $(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$ e) O raio do semi círculo será: $\frac{9}{(4+\pi)}$ f)$D_{AC} = \frac{5}{2\sqrt{6}}$ e $D_{CB} = \frac{20\sqrt{6}-1}{2\sqrt{6}}$ g)$\frac{m}{n}$ h) Volume máximo de $128cm^2$ quando $x = 2$ i) Velocidade mínima em $t = 1$, $f(1) = 30$, velocidade máxima em $t = 0$ e $t = 4$, $f(0) = f(4) = 50$. j) A quantidade de cerca utilizada é mínima na opção (2). k) O arame deverá ser cortado no ponto $\frac{\pi L}{4+\pi}$. l) Tangente no ponto de abscissa $x_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Exercícios 6.2.1

a) $Cmed(x) = 2x^2 - 10x + 30 + \frac{100}{x}$ e $Cmg(x) = 6x^2 - 20x + 30$
b) $Rmed(x) = -10x + 1000$ e $Rmg(x) = -20x + 1000$ c) $e = \frac{1}{5}$

Exercícios 7.1

a) $-\frac{3\sqrt{5}}{10}\frac{m}{s}$ b)$-\frac{5000\pi}{9}\frac{cm^3}{min}$ c) $\frac{dr}{dt} = \frac{10}{\pi}m/h$ d) $\frac{1}{10}rad/s$ e) $\frac{dz}{dt} = 78km/h$ f) $\frac{dV}{dt} = 21\pi m^3/h$ g) $\frac{7\sqrt{15}}{4}$ h) $d' = \frac{9}{\sqrt{1+\frac{500^2}{(60^2+50.60)^2}}}$

Exercícios 8.1

a) $e^{0,3} \simeq 1,349$ b)$sin(0,1) \simeq 0,09983$ c) $ln(1,1) \simeq 0,09531$ d)$10 + \frac{1}{20} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{1600000}$ e) $1 + 1 + 0,45 + 0,12 = 2,57$ f)$2 + \frac{3}{2}(x-1)$

Exercícios 9.4.1

a)$-\frac{(cosx)^2}{2} + k$ ou $\frac{(senx)^2}{2} + k$ b) $-\frac{2}{3}(cos(x))^{\frac{3}{2}} + k$ c) $ln|cosx| + k$ d) $\frac{(senx)^3}{3} + k$
e)$-e^{-x} + k$ f)$-\frac{1}{3(3x-1)} + k$ g) $ln(e^x + 1) + k$ h) $2\sqrt{lnx} + k$ i) $-\frac{5}{9}(x^3 + 5)^{\frac{3}{5}} + k$
j) $-cos(lnx) + k$ k) $-\frac{5}{4}cos(\sqrt[5]{x^4}) + k$ l) $ln|x^2 - 4x + 3| + k$ m) $sinx - \frac{sin^3x}{3} + k$
n) $\frac{1}{5}\sqrt{(1 + x^2)^5} - \frac{1}{3}\sqrt{(1 + x^2)^3} + k$

Exercícios 9.5.1

a) $-xcosx + senx + k$ b) $\frac{1}{3}x^3(lnx - \frac{1}{3}) + k$ c) $\frac{x^2}{2}[(lnx)^2 - lnx + \frac{1}{2}] + k$
d) $\frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{2} + 3ln(x) - \frac{x^5ln(x)}{5} + \frac{x^5}{25} + k$ e)$\frac{-e^{-x}(cosx+senx)}{2} + k$ f) $\frac{xsen(x)-xcos(x)}{2} + k$
g) $\frac{1}{2}(x^2sen(x^2) + cos(x^2)) + k$ h) $\frac{1}{2}(x^2 - 1)e^{x^2} + k$

Exercícios 9.6.1

a) $x - 3ln|x-1| + 6ln|x-2| + k$ b) $\frac{1}{2}ln|x^2 - 4| + k$ c) $ln|x-2| - \frac{4}{x-2} - \frac{5}{2(x-2)^2} + k$
d) $\frac{x^2}{2} + 2x + 4ln|x-1| - \frac{3}{x-1} + k$

Exercícios 9.7.1

a) $\frac{5}{3}$u.a. b) $\frac{1}{3}$u.a. c) 1u.a. d) 2u.a. e)$\frac{27}{4}$u.a. f)$\frac{2e+3e^2-3}{3e}$u.a.
g)$R\$2.100$ h) 7 milhões de habitantes i) 2008 pessoas j) 46,913 bi de barris

Exercícios 9.7.2

i) $V(0) = 20$ indica que venda no dia 12/04 totalizaram 2.000 reais.
ii) O ponto de máximo ocorre em $t = 3$, indicando que o dia de maior venda foi 15/02.
iii) $\frac{-1800}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-t^2}{18}} + 20t + c$ iv) $c = \frac{1800}{\sqrt{2\pi}}$
v) 512 (utilizando as aproximações) ou 502,88 (valor exato) é o valor (em centenas de reias) das vendas acumuladas de 12/04 ($t = 0$) até 16/04 ($t = 4$).

Exercícios 9.8.1

a) 1 b) divergente c) divergente d) 2 e) 0 f) 0